

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК

4

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
1935

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

ВЫПУСК ЧЕТВЕРТЫЙ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1935 ЛЕНИНГРАД

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Москва, Центр, Комсомольский пер., 6, ОНТИ. Главная редакция общетехнической литературы и номографии,

Сборники «Математическое просвещение» содержат оригинальные статьи по элементарным разделам математики, по методике и истории математики, отделы текущей жизни, задач, библиографии и т. д.

Сборники рассчитаны на учащуюся молодежь и преподавателей средних школ, рабфаков, техникумов и других учебных заведений.

Редакция обращается ко всем читателям с просьбой присылать свои пожелания и отзывы в редакцию по адресу: Б. Комсомольский пер., 6, пом. 5. Главная редакция общетехнической литературы. Редакция «Математического просвещения».

Редакция просит оповещать ее о всех местных событиях математической жизни (съезды, конференции, организация и работа обществ, кружков и т. д.).

Редакция *Р. Н. Бончковского*. Оформление *С. Л. Дыман*.

Корректурa *М. К. Саталкина*. Выпускающий *Н. А. Лапин*.

Сдано в производство 27/III 1935 г. Подписано к печати 23/X 1935 г.

Листов 9¹/₄. Тираж 5000. Формат 62×94¹/₁₆. Печ. знаков в листе 46 848

Заказ № 7195. Гл. ред. общ. дисц. № 42. Уполн. Главлита № В-29615.

П. С. УРЫСОН

(К десятилетию со дня смерти)

П. С. Александров (Москва)

17 августа 1934 г. исполнилось десять лет со дня смерти одного из крупнейших советских математиков Павла Самуиловича Урысона.

С именем П. С. Урысона связано возникновение обширной, чрезвычайно интересной и фундаментальной по своему значению математической теории, так называемой теории размерности. Эта теория посвящена столь глубоким и вместе с тем столь простым проблемам, что первое понятие об ее предмете можно дать всякому человеку, сколько-нибудь интересующемуся общими идеями современной геометрии.

Какое бы геометрическое образование мы ни изучали, первый вопрос, который перед нами встает, есть вопрос о том, является ли исследуемое геометрическое образование линией, поверхностью, телом или образом большего числа измерений. Возникает, другими словами, вопрос о числе измерений или размерности данного геометрического объекта. Несмотря на простоту и фундаментальность этого вопроса, он до работ Урысона решался только для простейших геометрических форм и решался способом, далеко не удовлетворительным.

Приходится сказать, что математика до работ Урысона не владела удовлетворительным и достаточно общим определением



П. С. Урысон
(1898—1924)

даже понятия линии. В самом деле, определение линии, обычно даваемое в аналитической геометрии, сводится в конце концов к тому, что линия есть в одну сторону однозначный и непрерывный образ прямолинейного отрезка. Но это определение, с одной стороны, не включает, например, границ плоских областей в сколько-нибудь сложных случаях. С другой же стороны, известно, что образы, заведомо непохожие на линии (например квадрат), могут быть представляемы как непрерывные образы отрезка.

Урысон впервые дал радикальное решение вопроса, установив для каждого множества точек, т. е. для каждой фигуры в самом широком смысле слова, число, которое естественно называть числом измерений (размерностью) данной фигуры. Этим, в частности, была решена проблема о чисто геометрическом и не зависящем ни от какой системы координат определении числа измерений обычного эвклидова пространства. Дав свое понятие размерности, Урысон вывел из него длинный ряд новых проблем общей геометрии. Он стал исследовать геометрические формы с совершенно новой точки зрения и фундаментальным образом обогатил—при этом в разных направлениях—наши познания о так называемом топологическом (качественном) строении пространства.

Работы Урысона оказали громадное влияние на дальнейшее развитие топологии (качественной геометрии). Длинный ряд исследований математиков разных стран посвящен дальнейшему развитию идей Урысона, и этот ряд исследований далеко еще не является законченным; идеи его сейчас столь же актуальны и живы, как и десять лет тому назад.

Теорией размерности не ограничиваются работы Урысона. Ему принадлежит ряд капитальных результатов общей теории топологических и метрических пространств и много очень ценных работ в других отделах математики—в анализе (теория интегральных уравнений, теория функций комплексного переменного), в геометрии (теория выпуклых тел) и др.

П. С. Урысон погиб в возрасте 26 лет во время купанья в бурную погоду в Атлантическом океане, у берегов Бретани. Там же в Бретани, в маленьком местечке Батц (Batz, департамент Нижней Луары) он похоронен.

Его короткая жизнь была совсем не похожа на жизнь кабинетного ученого. Насыщенная до последнего своего часа математическим творчеством, это была в то же время жизнь, наполненная самым горячим и страстным интересом к природе, к искусству, ко всем сторонам общественной и культурной деятельности человечества. Чрезвычайное разнообразие научных и вообще культурных интересов, необыкновенный блеск ума

и воображения соединялись с неисчерпаемым запасом жизнерадостности, оставив у всех знавших его впечатление и теперь, через десять лет, неизгладимое.

Внешние очертания жизни П. С. Урысона не сложны. Он родился 3 февраля 1898 г. в Одессе. По окончании Московской частной гимназии П. Н. Поповой он поступил в Московский университет (в 1915 г.), причем студентом занимался главным образом физикой. Успех этих занятий (которыми руководил акад. П. П. Лазарев) был настолько значителен, что в результате их появилась печатная работа П. С. Урысона о радиации трубок Кулиджа.

Однако в конце университетского курса математические интересы П. С. Урысона под влиянием преподавания профессора (теперь академика) Н. Н. Лузина взяли верх над его интересом к физике, и по окончании университета в 1919 г. он был оставлен при университете по кафедре Н. Н. Лузина. В этот момент он уже окончательно стал математиком.

Блестяще сдав в 1920/21 г. магистрантские экзамены, П. С. Урысон получил в 1921 г. доцентуру в Московском университете, к которой присоединилась в 1923 г. профессура в тогдашнем 2-м университете (теперь — педагогический институт им. А. С. Бубнова). Основные его топологические идеи возникли в 1921 г., после того как проблема топологического определения линии была ему поставлена проф. Д. Ф. Егоровым. С тех пор математическая жизнь П. С. Урысона представляла непрерывную цепь блестящих успехов. Его заграничные поездки в 1923 и 1924 гг. принесли его идеям признание европейских авторитетов и дали ему ряд новых проблем. Как раз последние недели его жизни были полны творческими планами. Все они оборвались 17 августа 1924 г.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СРЕДСТВАМИ

Р. Н. Бончковский (Москва)

1. Широко известен элементарный способ отыскания минимума функции $z = x^2 + px + q$. Для этого приводят ее к виду

$$z = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

и замечают, что функция z достигает минимума тогда, когда член $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ обращается в нуль, т. е. при $x = -\frac{p}{2}$.

Подобным же образом для исследования функции $y = ax^2 + bx + c$ приводят ее к виду

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

и замечают, что при $x = -\frac{b}{2a}$ первый член правой части обращается в нуль и, следовательно, функция y достигает минимума, если $a > 0$, или максимума, если $a < 0$.

Можно указать почти столь же простой способ для отыскания максимума и минимума функции третьей степени.

2. Пусть

$$z = x^3 + px^2 + qx + r.$$

Положим, что

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - m)^2(x - n) + s. \quad (1)$$

Раскрыв в правой части скобки и приведя подобные члены, получим:

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (2m + n)x^2 + (m^2 + 2mn)x + (-m^2n + s).$$

Последнее равенство должно быть тождеством, а потому коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях должны быть равны; это дает три уравнения:

$$-(2m + n) = p; \quad m^2 + 2mn = q; \quad -m^2n + s = r. \quad (2)$$

Исключив n из первых двух уравнений, получим:

$$3m^2 + 2pt + q = 0,$$

что дает:

$$m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3}. \quad (3)$$

Исследуем отдельно три возможных случая.

3. Если $p^2 - 3q < 0$, условие (3) дает для m комплексные значения и, следовательно, функция z не может быть представлена в виде (1). Легко убедиться, что в этом случае функция z возрастает вместе с возрастанием x и поэтому не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно,

$$z = x^3 + px^2 + qx + r = \left(x + \frac{p}{3}\right)^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)x + \left(r - \frac{p^3}{27}\right). \quad (4)$$

Первый член этой суммы с возрастанием x возрастает. В силу условия $p^2 - 3q < 0$, или $q - \frac{p^2}{3} > 0$, коэффициент при x во втором члене положителен и, следовательно, второй член рассматриваемой суммы также возрастает. Последний член суммы, как легко видеть, постоянен. Итак, z есть сумма трех членов, из которых два возрастают, а третий постоянен; значит z есть возрастающая функция. Отсюда видно, что при $p^2 - 3q < 0$ функция z не имеет ни максимума, ни минимума.

4. Если $p^2 - 3q = 0$, то, как видно из (4),

$$z = \left(x + \frac{p}{3}\right)^3 + \left(r - \frac{p^3}{27}\right).$$

Функция z есть опять возрастающая функция, так как она составлена из суммы двух функций, из которых первая возрастает, а вторая постоянна. Поэтому при условии $p^2 - 3q = 0$ функция z также не имеет ни максимума, ни минимума.

5. Если, наконец, $p^2 - 3q > 0$, то формула (3) дает два значения для m , которые обозначим m_1 и m_2 . С помощью уравнений (2) найдем соответствующие значения коэффициентов n и s . Получим две системы значений:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \quad n_1 = \frac{-p - 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \quad s_1 = r + m_1^2 n_1; \\ m_2 &= \frac{-p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \quad n_2 = \frac{-p + 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \quad s_2 = r + m_2^2 n_2; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и z можно написать в виде (1) двумя способами:

$$z = (x - m_1)^2 (x - n_1) + s_1, \quad (6a)$$

$$z = (x - m_2)^2 (x - n_2) + s_2. \quad (6b)$$

Уравнения (5) показывают, что $m_1 \neq n_1$, $m_2 \neq n_2$. Именно, всегда

$$m_1 > n_1, \quad m_2 < n_2. \quad (7)$$

Исследуем теперь выражение (6a) вблизи значения $x = m_1$.

Если x несколько (но немного) меньше m_1 , так что $n_1 < x < m_1$, то множитель $(x - m_1)^2$ положителен, а множитель $(x - n_1)$ имеет знак числа $(m_1 - n_1)$, т. е., как видно из условия (7), положителен, а значит и весь первый член положителен.

При $x = m_1$ множитель $(x - m_1)^2$ обращается в нуль, а значит и весь первый член равен нулю.

Если же x несколько (но немного) больше m_1 , то множитель $(x - m_1)^2$ положителен, а множитель $(x - n_1)$ имеет знак числа $(m_1 - n_1)$, т. е. положителен, а значит и весь первый член положителен.

Изложенное показывает, что при $x = m_1$ первый член выражения (6a) имеет минимум, равный нулю, следовательно, функция z имеет минимум, равный s_1 .

Исследуем теперь выражение (6b).

Если x несколько (но немного) меньше m_2 , то множитель $(x - m_2)^2$ положителен, а множитель $(x - n_2)$ имеет знак числа $(m_2 - n_2)$, т. е. отрицателен. Следовательно, весь первый член выражения (6b) отрицателен.

Если же $x = m_2$, то множитель $(x - m_2)^2$ обращается в нуль и весь первый член равен нулю.

Если, наконец, x несколько (но немного) больше m_2 , то множитель $(x - m_2)^2$ положителен, а множитель $(x - n_2)$ имеет знак числа $(m_2 - n_2)$, т. е. отрицателен, и весь первый член отрицателен.

Это показывает, что при $x = m_2$ первый член выражения (6b) имеет максимум, равный нулю, следовательно, функция z имеет максимум, равный s_2 .

6. Изложенный способ исследования функции 3-й степени можно представить в виде следующей схемы.

Составляем выражение $p^2 - 3q$. Если $p^2 - 3q \leq 0$, функция не имеет экстрем и надобность в дальнейшем исследовании отпадает. Если же $p^2 - 3q > 0$, то находим два значения m по формуле:

$$m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3}.$$

По формулам

$$n = -(2m + p), \quad s = r + m^2 n$$

находим соответствующие значения n и s . Получаем две системы значений:

$$m_1, n_1, s_1 \quad (m_1 > n_1); \quad m_2, n_2, s_2 \quad (m_2 < n_2).$$

Функция имеет минимум при $x = m_1$, равный s_1 , и максимум при $x = m_2$, равный s_2 .

7. Если функция y имеет вид

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

то ее можно преобразовать так:

$$y = a \left(x^3 + \frac{b}{a} x^2 + \frac{c}{a} x + \frac{d}{a} \right),$$

и положив $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, $r = \frac{d}{a}$, будем иметь:

$$y = a(x^3 + px^2 + qx + r) = az.$$

Поэтому, при $a > 0$ функция y имеет максимум и минимум при тех же значениях x , что и функция z , а при $a < 0$ функция y имеет максимум при том значении x , при котором z имеет минимум, и минимум при том значении x , при котором z имеет максимум.

Пример 1. $z = x^3 + 5x + 2$.

Дубнов, Задачник по дифференциальному исчислению, задача № 560.

Решение.

$$p^2 - 3q = -15 < 0.$$

Следовательно, функция не имеет экстрем.

Пример 2. $y = \frac{1}{10}(2x^3 - 6x^2 - 18x + 15)$.

Там же, № 567.

Решение.

$$z = x^3 - 3x^2 - 9x + \frac{15}{2}.$$

$$p^2 - 3q = 9 + 27 = 36 > 0.$$

Функция имеет экстремы.

$$m = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 27}}{3} = \frac{3 \pm 6}{3},$$

$$m_1 = 3, \quad m_2 = -1.$$

$$n_1 = -p - 2m_1 = 3 - 6 = -3, \quad n_2 = -p - 2m_2 = 3 + 2 = 5.$$

$$s_1 = r + m_1^2 n_1 = \frac{15}{2} - 3^2 \cdot 3 = -\frac{39}{2}, \quad s_2 = r + m_2^2 n_2 = \frac{15}{2} + 1^2 \cdot 5 = \frac{25}{2}.$$

Так как $m_1 > n_1$, $m_2 < n_2$, то при $x = 3$ функция z имеет минимум, равный $-\frac{39}{2}$, при $x = -1$ функция z имеет максимум, равный $\frac{25}{2}$. Следовательно, при $x = 3$ функция y имеет минимум, равный $-3,9$, при $x = -1$ функция y имеет максимум, равный $2,5$.

$$\text{ОБ УРАВНЕНИИ } \sum_{x=1}^{x=n} N_x^8 = 0.$$

$$\text{ОБ УРАВНЕНИИ } \sum_{x=1}^{x=n} N_x^3 = 0$$

(Задача Эйлера)

А. В. (Москва)

В тождестве

$$(y_1 - y_2)^3 + (y_2 - y_3)^3 + y_3^3 = y_1^3 - 3y_2(y_1^2 - y_2^2) + 3y_2^2(y_1 - y_3) \quad (1)$$

положим:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 + 1), \\ y_2 &= (3m^3 + 1)^3, \\ y_3 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Так как

$$\begin{aligned} 3y_2(y_1^2 - y_3^2) &= 3(3m^3 + 1)^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 \cdot 2 = \\ &= [2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 + 1)]^3 = y_1^3, \end{aligned}$$

$$3y_2^2(y_1 - y_3) = 3(3m^3 + 1)^6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 \cdot 2 = [2 \cdot 3 \cdot m(3m^3 + 1)^2]^3,$$

то из (1) следует:

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 + 1) - (3m^3 + 1)^3 + [(3m^3 + 1)^3 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 - 1)]^3 + \\ + [2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 - 1)]^3 + [-2 \cdot 3 \cdot m(3m^3 + 1)^2]^3 = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Это тождество будет решением уравнения

$$\sum_{x=1}^{x=4} N_x^3 = 0.$$

В тождестве

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2)^3 + (y_2 - y_3)^3 + \sum_{k=3}^{k=n} (y_k - y_{k+1})^3 + y_{n+1}^3 + z^3 = \\ = y_1^3 - 3y_2(y_1^2 - y_3^2) + 3y_2^2(y_1 - y_3) - 3 \sum_{k=3}^{k=n} [y_k \cdot y_{k+1}(y_k - y_{k+1})] - \\ - (z^3 + 3z)^3 - (2z)^3 - (3z)^3 - (4z)^3 + (z^3)^3 + (3z^2)^3 + (3z)^3 + (7z)^3. \quad (4) \end{aligned}$$

Положим опять y_1, y_2, y_3 по (2) и

$$y_{k+1} = 2^2 \cdot 3^{2k-2} \cdot m^3 (3m^3 - 1) \quad (k > 2).$$

Тогда

$$3y_k \cdot y_{k+1}(y_k - y_{k+1}) = -[2^3 \cdot 3^{2k-2} \cdot m^3 (3m^3 - 1)]^3,$$

$$y_k - y_{k+1} = -2^5 \cdot 3^{2k-4} \cdot m^3 (3m^3 - 1).$$

Подставив эти выражения в (4), получим:

$$\begin{aligned}
 & [2^3 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 + 1) - (3m^3 + 1)^3]^3 + [(3m^3 + 1)^3 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 (3m^3 - 1)]^3 + \\
 & + \sum_{k=3}^{k=n} [-2^5 \cdot 3^{2k-4} \cdot m^3 (3m^3 - 1)]^3 + [2^2 \cdot 3^{2k-2} \cdot m^3 (3m^3 - 1)]^3 + \\
 & + [-2 \cdot 3 \cdot m (3m^3 + 1)^2]^3 + \sum_{k=3}^{k=n} [-2^3 \cdot 3^{2k-3} \cdot m^3 (3m^3 - 1)]^3 + \\
 & + z^3 + (z^3 + 3^2)^3 + (2z)^3 + (3z)^3 + (4z)^3 + (-z^3)^3 + (-3z^2)^3 + \quad (5) \\
 & + (-3^2)^3 + (-7z)^3 = 0.
 \end{aligned}$$

Тождество (5), содержащее всего $2n + 9$ кубов, будет иметь при

m	n	z	Число кубов
$\neq 0$	> 2	$= 0$	$2n$
$= 0$	> 2	$+ 1$	5
$= 0$	> 2	$- 1$	7
$= 0$	> 2	$\neq 0; \pm 1$	9
$\neq 0$	3	$+ 1$	11
$\neq 0$	3	$- 1$	13
$\neq 0$	> 2	$\neq 0; \pm 1$	$2n + 9$

т. е. тождество (5) дает решение уравнения $\sum_{x=1}^{x=n} N_x^3 = 0$ для произвольного целого числа $n > 4$. Для случая $n = 4$ решение дает тождество (3).

ИЗ ЛИТЕРАТУРЫ О ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА:

Euler L., O era omnia, Series I, Opera mathematica.

Kronecker L., Werke.

Schwering K., Arch. der Math. und Phys. (3), 2, 1902.

Kühne H., там же (3), 4.

Веребрюсов А. А., Математический сборник, т. 23.

Агрономов Н. Н., Изв. Ф.-М. о-ва при Казанском университете, 1914 г., т. XII.

СООТНОШЕНИЯ ЭЙЛЕРА МЕЖДУ КРУГОМ, ОПИСАННЫМ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И КРУГАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ К ТРЕМ СТОРОНАМ ЭТОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Б. Гамбье (Париж)

Я рассматриваю треугольник ABC , вписанный в круг центра O и радиуса R , называю I, I', I'', I''' центры вписанного и внеписанных кругов (фиг. 1). Биссектриса AI' пересекает круг O в точке D , и мы имеем $DB = DC = DI = DI'$; биссектриса $AI''I'''$ пересекает круг O в точке D' , и мы имеем $D'B = D'C = D'I'' = D'I'''$.

Из некоторой точки P прямой AI' , как из центра, я описываю круг радиуса $PQ = r$, касательный к обеим сторонам угла A ; пусть $OP = d$. Из подобных треугольников APQ и $DD'C$ имеем:

$$\frac{r}{DC} = \frac{AP}{2}$$

или

$$2Rr = AP \cdot DC.$$

Выбирая на AD положительное направление, напомним:

$$\left. \begin{aligned} 2Rr &= AP \cdot ID = AP \cdot DI', \\ d^2 - R^2 &= PA \cdot PD, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

откуда, складывая и вычитая, получаем:

$$\left. \begin{aligned} d^2 - R^2 + 2Rr &= AP \cdot ID + AP \cdot DP = AP \cdot IP, \\ d^2 - R^2 - 2Rr &= AP \cdot I'D + AP \cdot DP = AP \cdot I'P. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Доказательство не зависит от положения точки P на AD :

если P совпадает с I , то имеем:

$$d^2 = R^2 - 2Rr; \quad (3)$$

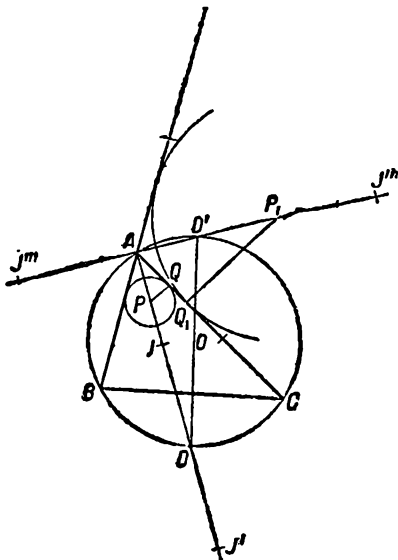
если P совпадает с I' , то имеем:

$$d^2 = R^2 + 2Rr. \quad (4)$$

Это — так называемые соотношения Эйлера.

Если взять на полупрямой AI'' точку P_1 , то имеем аналогично, полагая снова $P_1Q_1 = r$, $OP_1 = d$,

$$2Rr = AP_1 \cdot D'I' = AP_1 \cdot I'''D', \quad d^2 - R^2 = P_1D' \cdot P_1A; \quad (5)$$



Фиг. 1.

откуда

$$\left. \begin{aligned} d^2 - R^2 - 2rR &= AP_1(I''D' + D'P_1) = AP_1 \cdot I''P', \\ d^2 - R^2 + 2rR &= AP_1(I'''D' + D'P_1) = AP_1 \cdot I'''P_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Пользуясь соотношениями (2) или (6), мы легко доказываем обратные предложения: если два круга центров O и P удовлетворяют соотношению (3) или соотношению (4), то какая-либо точка круга O есть вершина треугольника, вписанного в круг O и имеющего круг P своим вписанным или внеписанным кругом.

Действительно, предположим, что соотношение (3) имеет место: из него заключаем $R > 2r$, $d < R - r$; значит, круг P целиком содержится внутри круга O : из точки A круга O я провожу касательные к кругу P , они пересекают вторично круг O в точках B и C ; первое соотношение (2) принимает вид $AP \cdot IP = 0$, значит, P совпадает с I .

Предположим, наоборот, что соотношение (4) имеет место: из него вытекает $R < d < R + r$. Легко видеть, что если $d < 3R$, то оба круга пересекаются; тогда как если $d > 3R$, то круг P содержит круг O целиком внутри себя; мы, следовательно, ограничимся случаем $d < 3R$.

Я беру точку A на внешней по отношению к кругу P части круга O и начинаю снова то же построение: если круг P вписан в угол BAC , то второе соотношение (2) дает $I'P = 0$. Если круг P вписан в один из углов, принадлежащих к BAC , например в угол BAC , то я пользуюсь первым соотношением (6), которое дает $I''P = 0$; во всяком случае P совпадает с центром одного из внеписанных кругов треугольника.

Перевел Н. А. Путья.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ НЕКОТОРЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРОЕКЦИЙ

С. И. Зетель (Москва)

1. В плоскости треугольника ABC дана точка. Спроектируем эту точку на стороны треугольника. Треугольник, вершинами которого являются проекции данной точки, называется треугольником проекций этой точки относительно данного треугольника.

В 1874 г. Лемуаном (Lemoine) была предложена следующая задача: вычислить площадь треугольника проекций точки пересечения симедиан (симедианы — прямые, исходящие из вершин треугольника и делящие противоположные стороны на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон). Решение этой задачи дано Шадю (Chady) в „Nouvelles Annales de Mathématiques“ за 1875 г. Площадь искомого треугольника равна

$$\frac{12 S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

где S — площадь данного треугольника.

В 1878 г. Эн (Hain) в журнале „Nouvelle correspondance mathématique“ предложил следующую задачу: пусть P, Q, R — проекции центра тяжести треугольника на его стороны.

Показать, что площадь треугольника PQR равна

$$\frac{4}{9} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} S^2,$$

где S — площадь данного треугольника; a, b и c — его стороны.

В том же журнале приводится и решение этой задачи, данное Мелюльфю (Médullus).

В этой статье я хочу показать, что предложенные задачи являются частным случаем следующей более общей задачи.

Точка пересечения «прямых n » спроектирована на стороны треугольника. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются проекции этой точки.

„Прямыми n “ мы называем прямые, делящие стороны треугольника пропорционально n -м степеням прилежащих сторон¹.

Кроме того, мы покажем, что, зная формулу Лемуана, можно сразу получить формулу Эна, и обратно.

Из свойств „прямых n “ в дальнейшем необходимы следующие два:

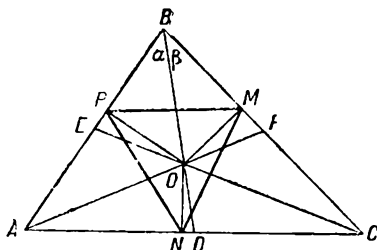
1) „Прямая n “ делит угол B из вершины которого она выходит, на две части α и β так, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}},$$

где α — угол, прилежащий к стороне a , а β — угол, прилежащий к стороне c (фиг. 1).

Доказательство. Пусть BD — „прямая n “:

$$\begin{aligned} \frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } DBC} &= \frac{c^n}{a^n}, \\ \frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } DBC} &= \frac{c \cdot BD \cdot \sin \alpha}{a \cdot BD \cdot \sin \beta}, \\ \frac{c^n}{a^n} &= \frac{c \cdot \sin \alpha}{a \cdot \sin \beta}, \\ \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}. \end{aligned} \quad (1)$$



Фиг. 1.

2) Найдем расстояние от точки пересечения „прямых n “ до сторон треугольника. Пусть $OM = x$, $ON = y$, $OP = z$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^{n-1}} &= \frac{y}{b^{n-1}} = \frac{z}{c^{n-1}}, \quad \frac{ax}{a^n} = \frac{by}{b^n} = \frac{cz}{c^n} = \frac{ax + by + cz}{a^n + b^n + c^n} = \frac{2S}{a^n + b^n + c^n}, \\ x &= \frac{2S a^{n-1}}{a^n + b^n + c^n}; \quad y = \frac{2S b^{n-1}}{a^n + b^n + c^n}; \quad z = \frac{2S c^{n-1}}{a^n + b^n + c^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

¹) О построении и свойствах этих прямых см. мою статью в „Математическом просвещении“ № 1 за 1934 г.

2. Теперь перейдем к решению поставленной задачи. Искомая площадь может быть выражена так:

$$S_{PMN} = S_{PON} + S_{POM} + S_{NOM}.$$

Так как

$$\angle A + \angle PON = \pi, \text{ то}$$

$$\frac{S_{PON}}{S_{ABC}} = \frac{OP \cdot ON}{b \cdot c} = \frac{yz}{bc} = \frac{4S^2 b^{n-1} c^{n-1}}{(a^n + b^n + c^n)^2 bc} = \frac{4S^2 b^{n-2} c^{n-2}}{(a^n + b^n + c^n)^2}.$$

Преобразуем это равенство следующим образом:

$$\frac{S_{PON}}{S_{ABC}} = \frac{4S^2 a^{n-2} b^{n-2} c^{n-2}}{(a^n + b^n + c^n)^2} \cdot a^{2-n} = k a^{2-n}, \quad (3)$$

где

$$k = \frac{4S^2 a^{n-2} b^{n-2} c^{n-2}}{(a^n + b^n + c^n)^2}.$$

Отсюда

$$S_{PON} = k a^{2-n} S,$$

где S —площадь треугольника ABC .

Аналогично

$$S_{POM} = k b^{2-n} S, \quad S_{NOM} = k c^{2-n} S.$$

Итак,

$$S_{PON} : S_{POM} : S_{NOM} = a^{2-n} : b^{2-n} : c^{2-n}. \quad (4)$$

Искомая площадь

$$S_{PMN} = kS (a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n}) = \frac{4S^3 (abc)^{n-2} (a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n})}{(a^n + b^n + c^n)^2}. \quad (5)$$

Итак, нами получена общая формула для вычисления площади треугольника проекций точки пересечения „прямых n “.

3. Рассмотрим частный случай формулы (5), когда $n = 0$. „Прямые n “—медианы данного треугольника. Точка их пересечения—центр тяжести данного треугольника. Площадь треугольника проекций

$$S_{PMN} = \frac{4S^3 (abc)^{-2} (a^2 + b^2 + c^2)}{(a^0 + b^0 + c^0)^2} = \frac{4}{9} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} S^2.$$

Нами получена формула Эна. Когда O —центр тяжести треугольника, то

$$S_{PON} : S_{POM} : S_{NOM} = a^2 : b^2 : c^2.$$

Рассмотрим случай $n = 1$. „Прямые n “—биссектрисы внутренних углов треугольника. Точка их пересечения—центр вписанного круга. В этом случае

$$S_{PMN} = \frac{4S^3 (abc)^{-1} (a + b + c)}{(a + b + c)^2} = \frac{4S^3}{2abc} = \frac{rS}{2R},$$

$$S_{PON} : S_{POM} : S_{NOM} = a : b : c.$$

Случай $n = 2$. Прямые—симедианы треугольника. Точка их пересечения—точка Лемуана.

$$S_{PMN} = \frac{4S^3 \cdot 3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Нами получена формула Лемуана. Если O есть точка Лемуана, то из равенства (4) следует, что

$$S_{PON} = S_{POM} = S_{NOM}.$$

Стало быть, точка Лемуана треугольника ABC есть центр тяжести треугольника.

Рассмотрим еще два частных случая: $n = 3$ и $n = -1$.

При $n = 3$:

$$S_{PMN} = \frac{4S^3 abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}{(a^3 + b^3 + c^3)^2} = \frac{4S^3 (bc + ac + ab)}{(a^3 + b^3 + c^3)^2}.$$

При $n = -1$ прямые—антибиссектрисы

$$S_{PMN} = \frac{4S^3 (a^3 + b^3 + c^3)}{a^3 b^3 c^3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} = \frac{4S^3 (a^3 + b^3 + c^3)}{abc (bc + ac + ab)^2}.$$

4. Итак, нами получены формулы Эна и Лемуана, как частные случаи более общих формул. Теперь покажем, что из одной из этих формул легко получается другая.

Для этого рассмотрим свойства изогональных прямых. Прямые, исходящие из вершины треугольника и образующие равные углы с биссектрисой внутреннего угла при той же вершине, называются изогональными прямыми. Докажем следующую теорему. Прямая изогональная „прямой n “ есть „прямая $2 - n$ “. Доказательство очень просто.

Пусть BD —„прямая n “. Тогда по доказанному

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Так как изогональная прямая образует соответственно с прямыми AB и BC углы β и α , то

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{a^{1-n}}{c^{1-n}}.$$

Стало быть, эта прямая, на основании приведенного нами свойства „прямых n “, есть „прямая $2 - n$ “.

Прямая, изогональная медиане, есть симедиана, так как $2 - n = 2 - 0 = 2$. Прямая, изогональная биссектрисе, есть, понятно, биссектриса: $2 - n = 2 - 1 = 1$. Прямая, изогональная антибиссектрисе, есть прямая кубов, так как $2 - (-1) = 3$.

5. Пусть из вершин треугольника проведены „прямые n “ и изогональные им „прямые $2 - n$ “. Точка пересечения трех „прямых n “ и точка пересечения трех „прямых $2 - n$ “ называются

взаимно изогональными. Отсюда следует, что точка Лемуана и центр тяжести треугольника взаимно изогональны; также взаимно изогональны точки пересечения антибиссектрис и прямых кубов. Покажем, что, зная площадь треугольника проекций точки пересечения „прямых n “, легко найти площадь треугольника проекций изогональной ей точки, т. е. точки пересечения „прямых $2-n$ “. Для этого преобразуем формулу (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{PMN} &= \frac{4S^3 a^{n-2} b^{n-2} c^{n-2} (a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n})}{(a^n + b^n + c^n)^2} = \\ &= \frac{8S^3 a^{n-1} b^{n-1} c^{n-1}}{(a^n + b^n + c^n)^3 \cdot 2abc} \cdot (a^n + b^n + c^n) \cdot (a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n}) = \\ &= \frac{xyz}{2abc} (a^n + b^n + c^n) (a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n}), \end{aligned} \quad (6)$$

где x, y, z —расстояния от точки пересечения „прямых $2-n$ “ до сторон треугольника ABC .

Пусть P_1, M_1, N_1 —проекции точки пересечения „прямых $2-n$ “ на стороны треугольника. По формуле (6) площадь треугольника $P_1M_1N_1$ выразится следующим образом:

$$S_{P_1M_1N_1} = \frac{x_1 y_1 z_1}{2abc} (a^n + b^n + c^n) (a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n}), \quad (7)$$

где x_1, y_1, z_1 —расстояния точки пересечения „прямых $2-n$ “ от сторон треугольника ABC .

Итак:

$$\begin{aligned} \frac{S_{P_1M_1N_1}}{S_{PMN}} &= \frac{x_1 y_1 z_1}{xyz}; \\ x_1 y_1 z_1 &= \frac{a^{1-n} b^{1-n} c^{1-n} \cdot 8S^3}{(a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n})^3}; \quad xyz = \frac{a^{n-1} b^{n-1} c^{n-1} \cdot 8S^3}{(a^n + b^n + c^n)^3}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} S_{P_1M_1N_1} &= \frac{x_1 y_1 z_1}{xyz} S_{PMN} = \frac{(abc)^{1-n} (a^n + b^n + c^n)^3}{(a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n}) (abc)^{n-1}} \cdot S_{PMN}, \\ S_{P_1M_1N_1} &= \frac{(a^n + b^n + c^n)^3 (abc)^{2-2n}}{(a^{2-n} + b^{2-n} + c^{2-n})^3} \cdot S_{PMN}. \end{aligned} \quad (8)$$

Площадь треугольника проекций точки Лемуана легко получится из площади треугольника проекций центра тяжести, достаточно для этого в формуле (8) положить $n=0$, а вместо S_{PMN} подставить

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot S^3.$$

Подставив, имеем:

$$S_{P_1M_1N_1} = \frac{(a^0 + b^0 + c^0) a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot S^3 = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Обратно, зная площадь треугольника проекций точки Лемуана, легко найдем по формуле (8) площадь треугольника проекций центра тяжести, для чего в формуле (8) положим $n = 2$ и

$$S_{PMN} = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} S_{P_1M_1N_1} &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{(a^{2-2} + b^{2-2} + c^{2-2})^3} \cdot \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} = \\ &= \frac{12S^3 (a^2 + b^2 + c^2)}{27a^2b^2c^2} = \frac{4}{9} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2} S^3. \end{aligned}$$

Итак, из формулы Эна легко получается формула Лемуана, и обратно.

Интересно рассмотреть формулу (8) при $n = 1$:

$$S_{P_1M_1N_1} = \frac{(a + b + c)^3}{(a + b + c)^3} S_{PMN}; \quad S_{P_1M_1N_1} = S_{PMN},$$

что и следовало ожидать, так как биссектрисы изогональны самим себе.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМЫХ ЧЕВЫ

С. И. Зетель (Москва)

1. Итальянским геометром Джованни Чева в 1678 г. была доказана теорема, положившая начало новой синтетической геометрии. Теорема Чевы может быть формулирована следующим образом: прямые AD , BE , CF , проведенные из вершин треугольника и пересекающиеся в одной точке (фиг. 1), делят противоположные стороны так, что

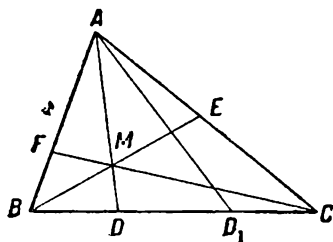
$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$$

или

$$AE \cdot CD \cdot BF = EC \cdot DB \cdot FA.$$

Последнее равенство позволяет дать следующую формулировку теоремы Чевы. Прямые, соединяющие произвольную точку с вершинами треугольника (так называемые чевианы), определяют на сторонах треугольника шесть отрезков, из которых произведение трех, не имеющих общих точек, равно произведению трех других.

В настоящей заметке будут рассмотрены исключительно чевианы, пересекающиеся внутри треугольника. Назовем отношением отрезков чевианы отношение вида $\frac{BM}{ME}$, т. е. отношение



Фиг. 1.

отрезка чевианы от вершины до общей точки к отрезку от общей точки до основания. Для отношений чевиан, пересекающихся внутри треугольника, существует следующая теорема:

Разность произведения отношений отрезков чевиан и суммы этих отношений есть величина постоянная, равная двум, т. е.:

$$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{CM}{MF} \cdot \frac{BM}{ME} - \left(\frac{AM}{MD} + \frac{CM}{MF} + \frac{BM}{ME} \right) = 2.$$

Повидимому, эта теорема была впервые дана Эйлером. Мы дадим доказательство этой теоремы, основанное на одной из теорем голландского математика ван-Обеля (van Aubel), поместившего в журнале *Nouvelle correspondance mathématique* за 1874—1880 гг. ряд статей.

1. Теорема ван-Обеля

Для каждой из прямых Чева, пересекающихся внутри треугольника, существует соотношение

$$\frac{AM}{MD} - \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$

Действительно, рассматривая площади треугольников AMC , AMB и BMC , найдем:

$$\frac{\text{пл. } AMC}{\text{пл. } BMC} = \frac{AF}{FB}, \quad \frac{\text{пл. } AMB}{\text{пл. } BMC} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

(AF и FB пропорциональны высотам, опущенным из A и B на основание MC). Следовательно,

$$\frac{\text{пл. } AMC + \text{пл. } AMB}{\text{пл. } BMC} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}. \quad (2)$$

Из рассмотрения треугольников AMC и CMD заключаем:

$$\begin{aligned} \frac{\text{пл. } AMC}{\text{пл. } CMD} - \frac{\text{пл. } AMB}{\text{пл. } BMD} &= \frac{AM}{MD}, \\ \frac{\text{пл. } AMC + \text{пл. } AMB}{\text{пл. } CMD + \text{пл. } BMD} &= \frac{AM}{MD}, \\ \frac{\text{пл. } AMC + \text{пл. } AMB}{\text{пл. } BMC} &= \frac{AM}{MD}. \end{aligned} \quad (3)$$

Сравнивая равенства (2) и (3), получим:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}. \quad (4)$$

Итак, теорема ван-Обеля доказана.

Интересны частные случаи этой теоремы:

а) Прямые AD , BE , CF — медианы. В этом случае

$$AF = FB, \quad AE = EC;$$

тогда

$$\frac{AM}{MD} = 1 + 1 = 2,$$

т. е. медиана делится в точке пересечения медиан в отношении 2:1, считая от вершины.

б) Прямые AD , BE , CF — биссектрисы. В этом случае

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b}{b}, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{c}{a};$$

тогда

$$\frac{AM}{MD} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}.$$

с) M , точка пересечения чевиан, есть точка Жергона, т. е. точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанного круга; тогда

$$\frac{AF}{FB} = \frac{p-a}{p-b}, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{p-a}{p-c};$$

поэтому

$$\frac{AM}{MD} = \frac{p-a}{p-b} + \frac{p-a}{p-c} = \frac{(p-a)(p-c+p-b)}{(p-b)(p-c)} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

д) Рассмотрим, в каком отношении делятся в точке пересечения „прямые n “. „Прямыми n “ мы называем прямые, исходящие из вершин треугольника и делящие противоположные стороны в отношении n к степеням прилежащих сторон (см. мою статью „Математическое просвещение“, сб-к первый, 1934 г.):

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{b^n}{a^n} + \frac{c^n}{a^n} = \frac{b^n + c^n}{a^n}.$$

Отсюда легко получить, давая n различные значения, величины отношения для медиан, биссектрис, симедиан, антибиссектрис.

Действительно, при $n=0$ получим для медианы:

$$\frac{AM}{MD} = 2;$$

при $n=1$ получим для биссектрисы:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{b+c}{a};$$

при $n=2$ получим для симедианы:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{b^2 + c^2}{a^2};$$

при $n=-1$ получим для антибиссектрисы:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{b^{-1} + c^{-1}}{a^{-1}} = \frac{a(b+c)}{bc}.$$

2. Теперь перейдем к доказательству основной теоремы. Пусть

$$\frac{AF}{FB} = \lambda_c, \frac{BD}{DC} = \lambda_a, \frac{CE}{EA} = \lambda_b.$$

По теореме Чебы $\lambda_a \lambda_b \lambda_c = 1$, поэтому

$$\frac{AM}{MD} = \lambda_c + \frac{1}{\lambda_b}, \frac{CM}{MF} = \lambda_b + \frac{1}{\lambda_a}, \frac{BM}{ME} = \lambda_a + \frac{1}{\lambda_c}.$$

Обозначим через T сумму отношений $\frac{AM}{MD} + \frac{CM}{MF} + \frac{BM}{ME}$, а через Π — произведение этих же отношений; тогда

$$T = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} + \frac{1}{\lambda_c},$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(\lambda_c + \frac{1}{\lambda_b} \right) \left(\lambda_b + \frac{1}{\lambda_a} \right) \left(\lambda_a + \frac{1}{\lambda_c} \right) = \\ &= \lambda_a \lambda_b \lambda_c + \lambda_a + \lambda_c + \lambda_b + \frac{1}{\lambda_b} + \frac{1}{\lambda_c} + \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{1}{\lambda_a \lambda_b \lambda_c} = 1, \quad \text{то} \quad \Pi = T + 2. \quad (5)$$

Теорема доказана.

Поставим следующую задачу: найти чевианы, для которых T и Π имеют минимальное значение¹⁾.

$$\begin{aligned} T &= \lambda_a + \lambda_b + \frac{1}{\lambda_a \lambda_b} + \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} + \lambda_a \lambda_b, \\ \frac{\partial T}{\partial \lambda_a} &= 1 - \frac{1}{\lambda_b \lambda_a^2} - \frac{1}{\lambda_a^2} + \lambda_b, \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda_b} = 1 - \frac{1}{\lambda_a \lambda_b^2} - \frac{1}{\lambda_b^2} + \lambda_a. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразовав равенства (6) и приравняв частные производные нулю, получим:

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_b) \left(1 - \frac{1}{\lambda_b \lambda_a^2} \right) &= 0, \\ (1 + \lambda_a) \left(1 - \frac{1}{\lambda_a \lambda_b^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\lambda_a > 0 \text{ и } \lambda_b > 0, \quad \text{то} \quad \lambda_b \lambda_a^2 = 1, \quad \lambda_a \lambda_b^2 = 1.$$

Следовательно, $\lambda_a = \lambda_b = 1$ и

$$\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = 1. \quad (7)$$

¹⁾ Читатели, незнакомяе с дифференциальным исчислением, могут без ущерба для понимания дальнейшего пропустить конец этого параграфа.
(Прим. ред.)

При $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = 1$, T имеет минимум. Это легко доказать составив производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda_a^2} = \frac{2}{\lambda_b \lambda_a^3} + \frac{2}{\lambda_a^3}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda_b^2} = \frac{2}{\lambda_a \lambda_b^3} + \frac{2}{\lambda_b^3}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda_a \partial \lambda_b} = \frac{1}{\lambda_a^2 \lambda_b^2} + 1.$$

При $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = 1$ имеем:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda_a^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda_b^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda_a \partial \lambda_b} \right)^2 > 0$$

и так как $\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda_b^2} > 0$ (при $\lambda_a = 1$), то при $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = 1$, T имеет

минимум, равный 6. $\Pi = 8$ есть минимум. Итак, сумма отношений отрезков прямых Чебы, пересекающихся внутри треугольника, не меньше 6, а произведение не менее 8. Для медиан $T = 6$, а $\Pi = 8$.

3. Если в выражении для $T = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} + \frac{1}{\lambda_c}$ заменить $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ соответственно через $\frac{1}{\lambda_a}, \frac{1}{\lambda_b}, \frac{1}{\lambda_c}$, то величина T , как легко видеть, остается без изменения. Каково геометрическое значение инвариантности T ? Замена λ_a на $\frac{1}{\lambda_a}$ приводит к замене чевианы AD чевианой AD_1 (фиг. 1). D_1 —основание новой чевианы и D —основание старой чевианы равно отстоят от середины стороны BC . Две точки на стороне треугольника, равноотстоящие от середины этой стороны, называются изотомическими точками (*Longchamps*). Две прямые, соединяющие вершину треугольника с изотомическими точками противоположной стороны, наз. изотомическими прямыми. Нами доказана интересная теорема: величины T и Π не меняются от замены данных чевиан изотомическими прямыми.

Преобразуем выражение для Π следующим образом:

$$\Pi = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_b \lambda_c + \lambda_c \lambda_a + \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_c + 1. \quad (8)$$

Итак, если стороны треугольника разделены прямыми Чебы в отношении $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$, то произведение отношений прямых Чебы равно $(\lambda_a + 1)(\lambda_b + 1)(\lambda_c + 1)$.

Подсчитаем для частных случаев значение Π .

а) Пусть чевианы—„прямые n “:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \frac{BD}{DC} = \frac{c^n}{b^n}, & \lambda_a + 1 &= \frac{c^n + b^n}{b^n}, \\ \lambda_b &= \frac{CE}{EA} = \frac{a^n}{c^n}, & \lambda_b + 1 &= \frac{a^n + c^n}{c^n}, \\ \lambda_c &= \frac{AF}{FB} = \frac{b^n}{a^n}, & \lambda_c + 1 &= \frac{b^n + a^n}{a^n}, \\ \Pi &= \frac{(a^n + b^n)(b^n + c^n)(c^n + a^n)}{a^n b^n c^n}; \end{aligned}$$

при $n = 0$, $\Pi = 8$ для медиан,

при $n = 1$, $\Pi = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ для биссектрис,

при $n = 2$, $\Pi = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{a^2b^2c^2}$ для симедиан.

б) Чевианы—прямые Жергона:

$$\lambda_a = \frac{BD}{DC} = \frac{p-b}{p-c}, \quad \lambda_a + 1 = \frac{2p-b-c}{p-c} = \frac{a}{p-c},$$

$$\lambda_b = \frac{CE}{EA} = \frac{p-c}{p-a}, \quad \lambda_b + 1 = \frac{2p-a-c}{p-a} = \frac{b}{p-a},$$

$$\lambda_c = \frac{AF}{FB} = \frac{p-a}{p-b}, \quad \lambda_c + 1 = \frac{2p-a-b}{p-b} = \frac{c}{p-b}.$$

$$\Pi = \frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{rabc}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4rab^2c}{4S^2} = \frac{4pR}{S} = \frac{4R}{r}.$$

Итак, прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанного круга, делятся в точке Жергона так, что $\Pi = \frac{4R}{r}$. Эта теорема была дана Жергоном; нами она получена как частный случай более общей теоремы.

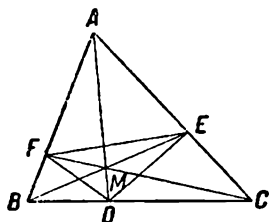
с) Чевианы—высоты остроугольного треугольника:

$$\lambda_a = \frac{BD}{DC} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}, \quad \lambda_a + 1 = \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} = \frac{\sin(B+C) \cos B}{\cos B \cos C \sin B} = \frac{\sin A}{\cos C \sin B},$$

$$\lambda_b = \frac{CE}{EA} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}, \quad \lambda_b + 1 = \frac{\sin B}{\cos A \sin C},$$

$$\lambda_c = \frac{AF}{FB} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}, \quad \lambda_c + 1 = \frac{\sin C}{\cos B \sin A},$$

$$\Pi = \frac{1}{\cos A \cos B \cos C} = \sec A \sec B \sec C.$$



Фиг. 2.

Площадь треугольника $FDE = S_*$; $S_* = S - S_{DEC} - S_{BFD} - S_{AFE}$; кроме того,

$$\frac{S_{DEC}}{S} = \frac{EC \cdot DC}{AC \cdot BC}$$

(как площади двух треугольников, имеющих общий угол).

4. Поставим следующую задачу. Определить площадь треугольника DEF оснований прямых Чевы (фиг. 2). Мы докажем, что эта площадь S_* равна $\frac{2S}{11}$, где S — площадь данного треугольника. Доказав эту теорему, мы получим некоторые известные теоремы геометрии треугольника, как частные случаи этой.

По условию $\frac{EC}{EA} = \lambda_b$, следовательно, $\frac{EC + EA}{EC} = \frac{\lambda_b + 1}{\lambda_b}$; отсюда $\frac{AC}{EC} = \frac{\lambda_b + 1}{\lambda_b}$; по условию $\frac{BD}{DC} = \lambda_a$, $\frac{BD + DC}{DC} = 1 + \lambda_a$, $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{1 + \lambda_a}$.
Итак,

$$\frac{S_{DEC}}{S} = \frac{\lambda_b}{(\lambda_a + 1)(\lambda_b + 1)};$$

$$S_{DBC} = \frac{\lambda_b(\lambda_c + 1)S}{(\lambda_a + 1)(\lambda_b + 1)(\lambda_c + 1)} = \frac{\lambda_b(\lambda_c + 1)S}{\Pi}.$$

Аналогично

$$S_{AFE} = \frac{\lambda_c(\lambda_a + 1)S}{\Pi}, \quad S_{BFD} = \frac{\lambda_a(\lambda_b + 1)S}{\Pi}.$$

Теперь легко найдем S_* :

$$\begin{aligned} S_* &= S \left[1 - \frac{\lambda_a(\lambda_b + 1) - \lambda_b(\lambda_c + 1) - \lambda_c(\lambda_a + 1)}{\Pi} \right] = \\ &= \frac{S(\Pi - \lambda_a\lambda_b - \lambda_b\lambda_c - \lambda_c\lambda_a - \lambda_a - \lambda_b - \lambda_c)}{\Pi} = \frac{S(\Pi - T)}{\Pi} = \frac{2S}{\Pi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из равенства (9) получаются интересные следствия:

1) Площадь треугольника оснований прямых Чевы не изменится при замене чевиан изотомическими прямыми.

2) Разность площади треугольника и площади треугольника оснований прямых Чевы равна $S - \frac{2S}{\Pi} = \frac{S(\Pi - 2)}{\Pi} = \frac{TS}{\Pi}$; назовем эту разность S_y .

3) $\frac{S_y}{S_*} = \frac{T}{2}$; так как $T \geq 6$, $\frac{S_y}{S_*} \geq 3$. Из равенства (9) получаются, как частные случаи, некоторые теоремы геометрии треугольника:

а) Чевианы — „прямые n “:

$$S_* = \frac{2Sa^n b^n c^n}{(a^n + b^n)(b^n + c^n)(c^n + a^n)};$$

при $n = 0$:

$$S_* = \frac{2S}{8} = \frac{S}{4};$$

при $n = 1$:

$$S_* = \frac{2Sabc}{(a + b)(b + c)(c + a)}. \quad (10)$$

Равенство (10) было получено Достором (*Dostor*). Чезаро (*Cesaro*) дал другое выражение для площади треугольника оснований биссектрис внутренних углов треугольника. Формула Чезаро такова:

$$S_* = \frac{\beta_a \beta_b \beta_c}{4p},$$

где $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ — длины биссектрис внутренних углов треугольника
Так как

$$\beta_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{p(p-a)bc},$$

$$\beta_b = \frac{2}{c+a} \sqrt{p(p-b)ac},$$

$$\beta_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{p(p-c)ab},$$

то

$$\beta_a \beta_b \beta_c = \frac{8 \sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)a^2b^2c^2}}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{8Spabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (11)$$

Сравнивая равенство (10) и (11), видим, что:

$$\frac{\beta_a \beta_b \beta_c}{4p} = \frac{2Sabc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = S_*.$$

Итак, нами получена формула Чезаро.

б) При $n=2$ из равенства (9) получаем выражение площади оснований симедиан треугольника:

$$S_* = \frac{2Sa^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

Это выражение площади для прямоугольного треугольника с гипотенузой c принимает вид:

$$S_* = \frac{2Sa^2b^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} = \frac{a^2b^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

с) Найдем площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания вписанного круга:

$$S_* = \frac{2S}{\Pi} = \frac{2Sr}{4R} = \frac{Sr}{2R} = \frac{pr^2}{2R}.$$

д) Площадь треугольника, вершинами которого являются основания высот остроугольного треугольника:

$$S_* = 2S \cos A \cos B \cos C.$$

ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕТРАЭДРАМИ

Р. Н. Бончковский (Москва)

1. Мы будем рассматривать заполнения пространства тетраэдрами, обладающие следующими двумя свойствами:

а) тетраэдры заполняют пространство сплошь без разрывов и двойных покрытий;

б) два тетраэдра, имеющие общую грань, симметричны друг другу относительно этой грани.

Наша задача состоит в установлении всех возможных заполнений пространства тетраэдрами, удовлетворяющих этим двум условиям.

2 Введем следующие обозначения:

Вершины тетраэдра T будем обозначать малыми латинскими буквами a со значками: a_1, a_2, a_3, a_4 . Телесные трехгранные углы при этих вершинах — греческими буквами α со значками: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ¹⁾. Грани тетраэдра — большими латинскими буквами A со значками, совпадающими со значками противоположащих вершин: A_1, A_2, A_3, A_4 . Ребра тетраэдра — малыми латинскими буквами b с двойными значками, совпадающими со значками их концов: $b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34}$. Двугранные углы между гранями тетраэдра — греческими буквами β с двойными значками, совпадающими со значками ребра двугранного угла: $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{23}, \beta_{24}, \beta_{34}$. Линейные углы между ребрами тетраэдра, имеющими общий конец, — греческими буквами γ с двойными значками, из которых первый значок совпадает со значком вершины линейного угла, а второй значок совпадает со значком грани, в плоскости которой лежит линейный угол: $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{21}, \gamma_{23}, \gamma_{24}, \gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{34}, \gamma_{41}, \gamma_{42}, \gamma_{43}$.

3. Рассмотрим теперь совокупность всех тех тетраэдров, которые имеют одно общее ребро, например ребро b_{12} . Эти тетраэдры расположены в пространстве в циклическом порядке $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n_{12}}$ вокруг ребра b_{12} так, что каждый тетраэдр T_i имеет общую грань со следующим тетраэдром T_{i+1} и последний тетраэдр $T_{n_{12}}$ имеет общую грань с T_1 . Благодаря симметрии каждой пары соседних тетраэдров относительно их общей грани, двугранные углы всех этих тетраэдров с ребром b_{12} равны между собой и равны β_{12} , сумма их равна 2π . Следовательно:

$$\beta_{12} = \frac{2\pi}{n_{12}}.$$

То же самое можно сказать и о всех других двугранных углах тетраэдров, входящих в заполнение, так что:

$$\beta_{13} = \frac{2\pi}{n_{13}}, \quad \beta_{14} = \frac{2\pi}{n_{14}}, \quad \beta_{23} = \frac{2\pi}{n_{23}}, \quad \beta_{24} = \frac{2\pi}{n_{24}}, \quad \beta_{34} = \frac{2\pi}{n_{34}}, \quad (1)$$

где $n_{13}, n_{14}, n_{23}, n_{24}, n_{34}$ — целые числа.

Из этой же симметрии смежных тетраэдров, имеющих общую грань, следует, что телесные трехгранные углы тетраэдров, имеющие общую вершину, равны (или симметричны) друг другу:

$$\alpha_1 = \frac{4\pi}{m_1}, \quad \alpha_2 = \frac{4\pi}{m_2}, \quad \alpha_3 = \frac{4\pi}{m_3}, \quad \alpha_4 = \frac{4\pi}{m_4}, \quad (2)$$

где m_1, m_2, m_3, m_4 — целые числа.

¹⁾ Если из вершины трехгранного телесного угла, как из центра, описать сферу произвольного радиуса, то грани трехгранного угла вырежут из этой сферы сферический треугольник. Отношение площади S этого треугольника к квадрату радиуса R служит мерой трехгранного угла: $\alpha = \frac{S}{R^2}$.

4. Для каждого трехгранного угла и его двугранных углов имеет место известное соотношение. Например, для углов $\alpha_1, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}$

$$\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{14} - \pi = \alpha_1^1). \quad (3)$$

Подставив значения входящих сюда величин из (1) и (2), получим:

$$\frac{2}{n_{12}} + \frac{2}{n_{13}} + \frac{2}{n_{14}} - 1 = \frac{4}{m_1}.$$

Для трех других трехгранных углов тетраэдра можно написать подобные же соотношения; таким образом, получаем следующую систему четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{n_{12}} + \frac{2}{n_{13}} + \frac{2}{n_{14}} - 1 &= \frac{4}{m_1}, \\ \frac{2}{n_{12}} + \frac{2}{n_{23}} + \frac{2}{n_{24}} - 1 &= \frac{4}{m_2}, \\ \frac{2}{n_{13}} + \frac{2}{n_{23}} + \frac{2}{n_{34}} - 1 &= \frac{4}{m_3}, \\ \frac{2}{n_{14}} + \frac{2}{n_{24}} + \frac{2}{n_{34}} - 1 &= \frac{4}{m_4}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

причем входящие в эту систему неизвестные имеют целочисленные значения. Эту систему нам надлежит решить.

5. Сначала ограничимся рассмотрением того случая, когда числа $n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{23}, n_{24}, n_{34}$ все четны. Без нарушения общности можно положить

$$n_{12} \geq n_{13} \geq n_{14}. \quad (5)$$

Тогда из первого уравнения системы (4) следует неравенство $\frac{6}{n_{14}} > 1$, или

$$n_{14} < 6. \quad (6)$$

Но $\beta_{14} < \pi$, а потому $\frac{2\pi}{n_{14}} < \pi$. Это дает:

$$n_{14} > 2. \quad (7)$$

Неравенства (6) и (7) показывают, что

$$n_{14} = 4. \quad (8)$$

(Не может быть $n_{14} = 3$ или $n_{14} = 5$, так как по предположению n_{14} — четное число).

Подставив $n_{14} = 4$ в первое уравнение системы (4), получаем:

$$\frac{2}{n_{12}} + \frac{2}{n_{13}} - \frac{1}{2} = \frac{4}{m_1}. \quad (9)$$

¹⁾ См., например, Кранц, Сферическая тригонометрия, ГТТИ, 1934 или Пржевальский, Пятизначная таблица логарифмов. (Формулы для решения сферических треугольников.)

Из этого уравнения следует неравенство $\frac{4}{n_{13}} > \frac{1}{2}$, или $n_{13} < 8$.
Так как, с другой стороны, $n_{13} > 2$, то

$$n_{13} = 4, 6. \quad (10)$$

Приняв $n_{13} = 4$ и подставив в уравнение (9), получим:

$$\frac{2}{n_{12}} = \frac{4}{m_1},$$

или

$$n_{12} = \frac{m_1}{2}. \quad (11)$$

Приняв же $n_{13} = 6$ и подставив в уравнение (9), получим:

$$\frac{2}{n_{12}} - \frac{1}{6} = \frac{4}{m_1},$$

откуда следует неравенство $\frac{2}{n_{12}} > \frac{1}{6}$, или

$$n_{12} < 12.$$

Так как число n_{12} ($\geq n_{13} = 6$) четно, то для n_{12} получим три возможных значения:

$$n_{12} = 6, 8, 10. \quad (12)$$

6. Заметим теперь, что значения числа $n_{12} = \frac{m_1}{2}$ не могут быть сколь угодно велики, а именно

$$n_{12} \leq 10. \quad (13)$$

Действительно, если предположить, что $n_{12} > 10$, второе уравнение системы (4) должно будет иметь решение:

$$n_{12} = \frac{m_1}{2} = \frac{m_2}{2} > 10, \quad n_{23} = n_{24} = 4,$$

так как входящие в него неизвестные должны иметь одну из тех систем значений, которые мы получили для неизвестных n_{12}, n_{13}, n_{14} , входящих в первое уравнение той же системы, а из них только в указанном случае $n_{12} > 10$. Но тогда из

$$n_{13} = n_{14} = n_{23} = n_{24} = 4$$

следует

$$\beta_{13} = \beta_{14} = \beta_{23} = \beta_{24} = 90^\circ,$$

а это показывает, что плоскости граней A_1 и A_2 параллельны друг другу, что невозможно. Значит

$$n_{12} \leq 10.$$

7. Сопоставляя условия (8), (10), (11), (12) и (13), получаем семь решений первого уравнения системы (4), приведенные в следующей таблице:

n_{12}	n_{13}	n_{14}	m_1
4	4	4	8
6	4	4	12
8	4	4	16
10	4	4	20
6	6	4	24
8	6	4	48
10	6	4	120

(14)

Такие же системы значений могут иметь другие неизвестные, входящие в другие уравнения системы (4).

Вычислив по этим данным углы β_{12} , β_{13} , β_{14} и α_1 по формулам (1) и (2), получим следующую таблицу:

β_{12}	β_{13}	β_{14}	α_1
90°	90°	90°	$\frac{\pi}{2}$
60°	90°	90°	$\frac{\pi}{3}$
45°	90°	90°	$\frac{\pi}{4}$
36°	90°	90°	$\frac{\pi}{5}$
60°	60°	90°	$\frac{\pi}{6}$
45°	60°	90°	$\frac{\pi}{12}$
36°	60°	90°	$\frac{\pi}{30}$

(15)

8. Для вычисления углов γ воспользуемся известной формулой триэдрометрии

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a^1),$$

приведа ее к виду

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Так, применив эту формулу к нахождению угла γ_{12} , получим:

$$\cos \gamma_{12} = \frac{\cos \beta_{12} + \cos \beta_{13} \cos \beta_{14}}{\sin \beta_{13} \sin \beta_{14}}.$$

¹⁾ См. сноску на стр. 28.

Подобные же формулы получим и для других углов γ . Произведя вычисления, получим следующую таблицу, в которой строки и столбцы соответствуют строкам и столбцам таблиц (14) и (15).

γ_{12}	γ_{13}	γ_{14}	
90°	90°	90°	(16)
60°	90°	90°	
45°	90°	90°	
36°	90°	90°	
54°44'	54°44'	70°32'	
35°16'	45°	54°44'	
20°54'	31°43'	37°23'	

Такие же значения могут иметь углы γ_{21} , γ_{23} , γ_{24} , γ_{31} , γ_{32} , γ_{34} , γ_{41} , γ_{42} , γ_{43} , так как три последних уравнения системы (4) совершенно аналогичны первому уравнению этой системы.

9. Сумма углов одного и того же треугольника-границы должна быть равна 180°; отсюда получаем четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{21} + \gamma_{31} + \gamma_{41} &= 180^\circ, \\ \gamma_{12} + \gamma_{32} + \gamma_{42} &= 180^\circ, \\ \gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{43} &= 180^\circ, \\ \gamma_{14} + \gamma_{24} + \gamma_{34} &= 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Сличая первое из этих уравнений со значениями углов γ , даваемых таблицей (16)¹⁾, легко убедиться, что 180° может быть получено лишь тремя способами

$$\left. \begin{aligned} 90^\circ + 45^\circ + 45^\circ &= 180^\circ, \\ 90^\circ + 54^\circ44' + 35^\circ16' &= 180^\circ, \\ 54^\circ44' + 54^\circ44' + 70^\circ32' &= 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Углы в 60°, 36° и 20°34' ни в одну из этих сумм не входят, поэтому вторые, четвертые и седьмые строки таблиц (14), (15) и

¹⁾ Следует иметь в виду, что значки при буквах γ в таблице (16) могут быть изменены в соответствии со значками при γ в последних трех уравнениях системы (17).

²⁾ Комбинация $\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0^\circ$, хотя и дает

$$60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

все же невозможна, так как в этом случае ребра b_{12} , b_{23} , b_{31} перпендикулярны к грани A_4 , т. е. параллельны между собой, что невозможно.

Наш вывод равенств (18) не совсем строг, так как таблица, которой мы пользовались, не дает абсолютно точных значений углов. Желающие могут легко доказать абсолютную правильность равенств (18) хотя бы с помощью формулы

$$\operatorname{tg} \gamma_{21} + \operatorname{tg} \gamma_{31} + \operatorname{tg} \gamma_{41} = \operatorname{tg} \gamma_{21} \cdot \operatorname{tg} \gamma_{31} \cdot \operatorname{tg} \gamma_{41},$$

вычислив тангенсы по тем значениям косинусов, которые были найдены по формуле триэдриметрии, приведенной в начале § 8.

(16) выпадают. Остаются только четыре возможных случая, представленных следующей таблицей:

n_{12}	n_{13}	n_{14}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{14}	m_1	α_1
4	4	4	90°	90°	90°	90°	90°	90°	8	$\frac{\pi}{2}$
8	4	4	45°	90°	90°	45°	90°	90°	16	$\frac{\pi}{4}$
6	6	4	60°	60°	90°	54°44'	54°44'	70°32'	24	$\frac{\pi}{6}$
8	6	4	45°	60°	90°	35°16'	45°	54°44'	48	$\frac{\pi}{12}$

(19)

10. Пользуясь таблицей (19), легко найти все тетраэдры, могущие образовать заполнение пространства, удовлетворяющие условиям а) и б) § 1. Следует только принять во внимание, что все элементы других трехгранных углов тетраэдра могут иметь те же, приведенные в таблице (19), значения; изменяются только значки при буквах.

Если

$$\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = 90^\circ, \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{14} = 90^\circ, \quad (20)$$

то, рассматривая граф A_2 , видим, что соответственно уравнениям (18) и таблице (19) либо

$$\gamma_{32} = \gamma_{42} = 45^\circ, \quad (21)$$

либо

$$\gamma_{32} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{42} = 35^\circ 16'. \quad (22)$$

[случай $\gamma_{32} = 35^\circ 16'$, $\gamma_{42} = 54^\circ 44'$ мы не рассматриваем, так как этот случай дает, очевидно, тетраэдр, симметричный тетраэдру (22)]. Рассмотрим эти два случая отдельно.

Если налицо случай (21), то элементы трехгранного угла α_3 могут быть взяты лишь из второй или четвертой строки таблицы (19).

Если возьмем их из второй строки, то получим:

$$\gamma_{34} = 90^\circ, \quad \gamma_{31} = 90^\circ,$$

что невозможно, так как тогда плоскость грани A_2 была бы перпендикулярна к ребрам b_{12} и b_{13} , следовательно, b_{12} было бы параллельно b_{13} , что невозможно.

Взяв элементы угла α_3 из четвертой строки таблицы (19), получим:

$$\gamma_{31} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{34} = 35^\circ 16', \quad \beta_{23} = 60^\circ, \quad \beta_{24} = 45^\circ. \quad (23)$$

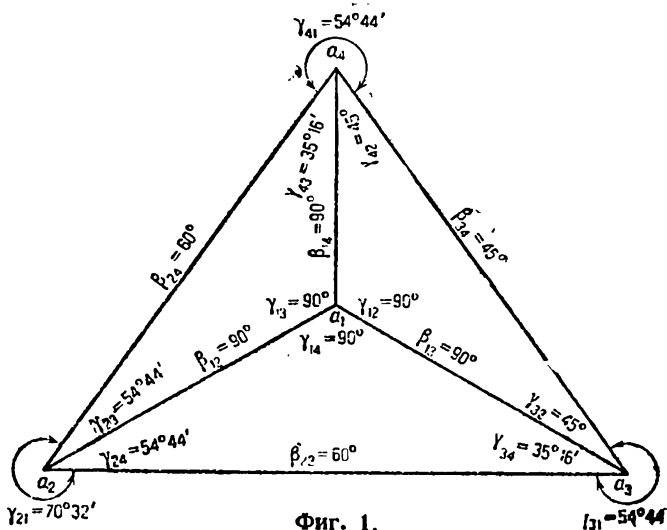
Сличая теперь расположение элементов трехгранного угла α_4 с таблицей (19), убеждаемся, что элементы этого угла могут быть взяты лишь из четвертой строки этой таблицы, так что

$$\gamma_{41} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{43} = 35^\circ 16', \quad \beta_{24} = 60^\circ. \quad (24)$$

Двугранные углы трехгранного угла α_2 равны $\beta_{12} = 90^\circ$, $\beta_{23} = 60^\circ$, $\beta_{24} = 60^\circ$; значит элементы этого угла могут быть взяты лишь из третьей строки таблицы (19):

$$\gamma_{21} = 70^\circ 32', \quad \gamma_{23} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{24} = 54^\circ 44'. \quad (25)$$

Этим заканчивается определение углов γ . Теперь, ориентируясь на таблицу (19), можно найти все остальные элементы тетраэдра.



Фиг. 1.

Результаты сведены в таблицу (фиг. 1):

$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$	$\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$	$\alpha_3 = \frac{\pi}{12}$	$\alpha_4 = \frac{\pi}{12}$		
$m_1 = 8$	$m_2 = 24$	$m_3 = 48$	$m_4 = 48$		
$\beta_{12} = 90^\circ$	$\beta_{13} = 90^\circ$	$\beta_{14} = 90^\circ$	$\beta_{23} = 60^\circ$	$\beta_{24} = 60^\circ$	$\beta_{34} = 45^\circ$
$n_{12} = 4$	$n_{13} = 4$	$n_{14} = 4$	$n_{23} = 6$	$n_{24} = 6$	$n_{34} = 8$
$\gamma_{12} = 90^\circ$	$\gamma_{13} = 90^\circ$	$\gamma_{14} = 90^\circ$	$\gamma_{21} = 70^\circ 32'$	$\gamma_{23} = 54^\circ 44'$	$\gamma_{24} = 54^\circ 44'$
$\gamma_{31} = 54^\circ 44'$	$\gamma_{32} = 45^\circ$	$\gamma_{34} = 35^\circ 16'$	$\gamma_{41} = 54^\circ 44'$	$\gamma_{42} = 45^\circ$	$\gamma_{43} = 35^\circ 16'$

(I)

11. Если же имеет место случай (22), т. е.

$$\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = 90^\circ, \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{14} = 90^\circ$$

$$\gamma_{32} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{42} = 35^\circ 16',$$

то, сличая расположение элементов трехгранного угла α_3 с таблицей (19), убеждаемся, что остальные элементы этого угла могут быть взяты лишь из третьей строки таблицы:

$$\gamma_{31} = 70^\circ 32', \quad \gamma_{34} = 54^\circ 44'; \quad \beta_{23} = \beta_{34} = 60^\circ.$$

Из треугольника-грани A_4 находим:

$$\gamma_{24} = 35^\circ 16'.$$

Сличая элементы углов α_2 и α_4 с таблицей (19), находим:

$$\gamma_{23} = 45^\circ, \quad \gamma_{43} = 45^\circ, \quad \gamma_{21} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{41} = 54^\circ 44', \quad \beta_{24} = 45^\circ.$$

Легко убедиться, что этот тетраэдр отличается от тетраэдра (I) лишь нумерацией вершин. Именно, вершины a_2 и a_3 поменяли свои значки.

12. Изложенное в предыдущих двух параграфах показывает, что других тетраэдров, кроме тетраэдра (I), элементы которых могут быть взяты из первой строки таблицы (19), не существует. Вычеркнув первую строку, постараемся построить тетраэдр с помощью трех оставшихся строк.

Если

$$\beta_{12} = 45^\circ, \quad \beta_{13} = \beta_{14} = 90^\circ, \quad \gamma_{12} = 45^\circ, \quad \gamma_{13} = \gamma_{14} = 90^\circ, \quad (26)$$

то из уравнений (17) и (18), примененных в грани A_2 , видим, что один из углов γ_{32} и γ_{42} равен 45° , а другой 90° . В силу их равноправности можно положить

$$\gamma_{32} = 45^\circ, \quad \gamma_{42} = 90^\circ. \quad (27)$$

Сличая расположение элементов трехгранного угла α_4 с таблицей (19), убеждаемся, что остальные элементы этого угла могут быть взяты лишь из второй строки таблицы (так как первая вычеркнута). Поэтому

$$\gamma_{41} = 90^\circ, \quad \gamma_{43} = 45^\circ, \quad \beta_{24} = 90^\circ, \quad \beta_{34} = 45^\circ. \quad (28)$$

Из треугольника A_3 находим:

$$\gamma_{23} = 45^\circ. \quad (29)$$

Сличая расположение элементов трехгранного угла α_2 с таблицей (19), убеждаемся, что остальные элементы этого угла следует взять из последней строки таблицы, так что

$$\gamma_{21} = 35^\circ 16', \quad \gamma_{24} = 54^\circ 44', \quad \beta_{23} = 60^\circ. \quad (30)$$

Из треугольников A_4 и A_1 находим углы γ_{34} и γ_{31} :

$$\gamma_{34} = 35^\circ 16', \quad \gamma_{31} = 54^\circ 44'. \quad (31)$$

Соединяя вместе результаты этого параграфа и определяя остальные элементы тетраэдра по таблице (19), получаем следующую таблицу элементов второго типа тетраэдров, заполняющих пространство:

$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$	$\alpha_2 = \frac{\pi}{12}$	$\alpha_3 = \frac{\pi}{12}$	$\alpha_4 = \frac{\pi}{4}$	
$m_1 = 16$	$m_2 = 48$	$m_3 = 48$	$m_4 = 16$	
$\beta_{12} = 45^\circ$	$\beta_{13} = 90^\circ$	$\beta_{14} = 90^\circ$	$\beta_{23} = 60^\circ$	$\beta_{24} = 90^\circ \quad \beta_{34} = 45^\circ$
$n_{12} = 8$	$n_{13} = 4$	$n_{14} = 4$	$n_{23} = 6$	$n_{24} = 6 \quad n_{34} = 8$
$\gamma_{12} = 45^\circ$	$\gamma_{13} = 90^\circ$	$\gamma_{14} = 90^\circ$	$\gamma_{21} = 35^\circ 16'$	$\gamma_{23} = 45^\circ \quad \gamma_{24} = 54^\circ 44'$
$\gamma_{31} = 54^\circ 44'$	$\gamma_{32} = 45^\circ$	$\gamma_{34} = 35^\circ 16'$	$\gamma_{41} = 90^\circ$	$\gamma_{42} = 90^\circ \quad \gamma_{43} = 45^\circ$

(см. фиг. 2).

13. Вычеркнув в таблице (19) две первые строки, постараемся определить вид тетраэдров, заполняющих пространство, с помощью двух последних строк таблицы.

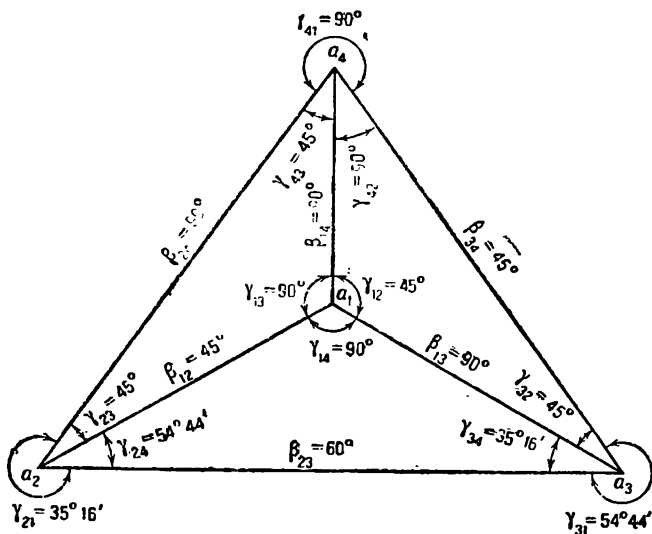
Если

$$\beta_{12} = \beta_{13} = 60^\circ, \quad \beta_{14} = 90^\circ, \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{14} = 70^\circ 32', \quad (32)$$

то, рассматривая треугольник-грань A_4 , убеждаемся, что в силу условий (17) и (18)

$$\gamma_{24} = \gamma_{34} = 54^\circ 44'. \quad (33)$$

Сличая полученные углы (32) и (33) с таблицей (19), убеждаемся, что остальные элементы трехгранного угла могут быть



Фиг. 2.

взяты как из третьей, так и из четвертой строки. Но если взять эти элементы из четвертой строки, то $\beta_{24} = 90^\circ$, и элементы трехгранного угла a_4 не могут быть взяты из третьей и четвертой строк. Значит, элементы угла a_2 придется взять из третьей строки. Получаем:

$$\gamma_{21} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{23} = 70^\circ 32', \quad \beta_{23} = 90^\circ, \quad \beta_{24} = 60^\circ. \quad (34)$$

Точно так же и элементы трехгранного угла a_3 приходится брать из третьей строки:

$$\gamma_{31} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{32} = 70^\circ 32', \quad \beta_{34} = 60^\circ. \quad (35)$$

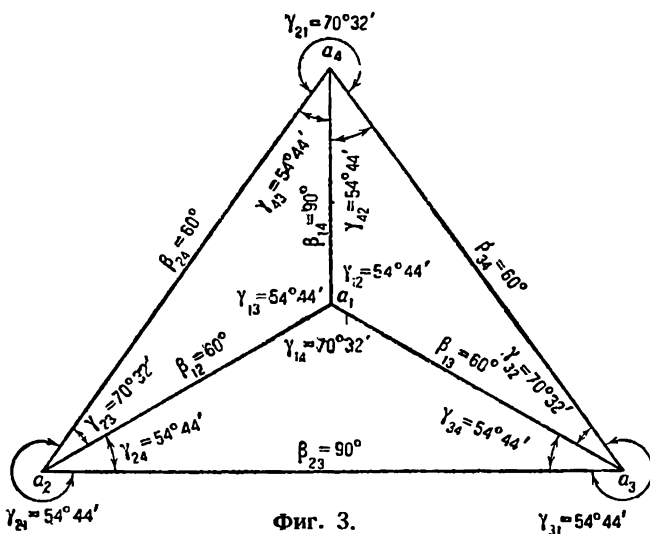
Линейные углы при вершине a_4 определяются из треугольников A_1, A_2, A_3 :

$$\gamma_{41} = 70^\circ 32', \quad \gamma_{42} = 54^\circ 44', \quad \gamma_{43} = 54^\circ 44'. \quad (36)$$

Собирая вместе результаты этого параграфа и принимая во внимание таблицу (19), получаем следующую таблицу элементов третьего типа тетраэдров, заполняющих пространство:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \alpha_1 = \frac{\pi}{6} & \alpha_2 = \frac{\pi}{6} & \alpha_3 = \frac{\pi}{6} & \alpha_4 = \frac{\pi}{6} & & & & \\
 m_1 = 24 & m_2 = 24 & m_3 = 24 & m_4 = 24 & & & & \\
 \beta_{12} = 60^\circ & \beta_{13} = 60^\circ & \beta_{14} = 90^\circ & \beta_{23} = 90^\circ & \beta_{24} = 60^\circ & \beta_{34} = 60^\circ & & (III) \\
 n_{12} = 6 & n_{13} = 6 & n_{14} = 4 & n_{23} = 4 & n_{24} = 6 & n_{34} = 6 & & \\
 \gamma_{12} = 54^\circ 44' & \gamma_{13} = 54^\circ 44' & \gamma_{14} = 70^\circ 32' & \gamma_{21} = 54^\circ 44' & \gamma_{23} = 70^\circ 32' & \gamma_{24} = 54^\circ 44' & & \\
 \gamma_{31} = 54^\circ 44' & \gamma_{32} = 70^\circ 32' & \gamma_{34} = 54^\circ 44' & \gamma_{41} = 70^\circ 32' & \gamma_{42} = 54^\circ 44' & \gamma_{43} = 54^\circ 44' & &
 \end{array}$$

(см. фиг. 3).



Фиг. 3.

14. Вычеркнем, наконец, из таблицы (19) все строки, кроме последней.

Если

$$\beta_{12} = 45^\circ, \beta_{13} = 60^\circ, \beta_{14} = 90^\circ, \gamma_{12} = 35^\circ 16', \gamma_{13} = 45^\circ, \gamma_{14} = 54^\circ 44', \quad (37)$$

то для треугольника-грани A_1 сейчас же получаем по последней строке таблицы (19):

$$\gamma_{21} = 35^\circ 16', \gamma_{31} = 45^\circ, \gamma_{41} = 54^\circ 44' \quad (38)$$

(см. фиг. 5), что невозможно, так как сумма углов треугольника A_1 оказывается меньше 180° .

15. До сих пор мы собственно еще не доказали, что трехгранные углы каждого из видов, приведенных в таблице (19),

действительно заполняют пространство вблизи вершины без просветов и двойных покрытий. Убедиться в этом не составляет никакого труда.

Возьмем куб и проведем через середины параллельных ребер его три плоскости. Легко убедиться, что эти плоскости пересекаются друг с другом под прямыми углами, образуя вокруг центра куба 8 трехгранных углов, соответствующих первой строке таблицы (19).

Если кроме этих трех плоскостей проведем еще две плоскости, проходящие через диагонали двух противоположных параллельных граней, то эти 5 плоскостей образуют вокруг центра куба 16 трехгранных углов того типа, который определяется второй строкой таблицы (19).

Если же в том же кубе проведем плоскость через каждую пару параллельных ребер и через каждую пару параллельных диагоналей противоположных граней, то получим 12 плоскостей, которые образуют вокруг центра куба 24 трехгранных угла того типа, который определяется третьей строкой таблицы (19).

Наконец, если проведем плоскость через каждую пару параллельных ребер, через каждую пару параллельных диагоналей противоположных граней и через середины параллельных ребер, то получим 15 плоскостей, которые образуют вокруг центра куба 48 трехгранных углов того типа, который определяется четвертой строкой таблицы (19).

Эти четыре построения показывают, что полученные три типа тетраэдров действительно заполняют пространство сплошь.

Переходим к рассмотрению тех случаев, в которых не все числа n_{12} , n_{13} , n_{14} , n_{23} , n_{24} , n_{34} четны.

16. Пусть теперь одно из этих чисел, например n_{12} , нечетно, а остальные числа n_{13} , n_{14} , n_{23} , n_{24} , n_{34} четны. Тогда совокупность тетраэдров, имеющую общее ребро n_{12} , состоит из нечетного числа n_{12} тетраэдров $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n_{12}}$. Если T_1 и T_2 имеют общую грань A_3 , то T_2 и T_3 имеют общую грань $A_4, \dots, T_{n_{12}}$ и T_1 — общую грань A_3 . Но у T_1 оставалась свободной грань A_4 , следовательно, в этом случае грани A_3 и A_4 равны.

При этом должно быть

$$b_{13} = b_{14}, \quad b_{23} = b_{24},$$

и тетраэдр симметричен относительно плоскости, проходящей через ребро b_{12} и через середину ребра b_{34} . Если мы каждый тетраэдр заполнения разобьем на два с помощью такой плоскости симметрии, то полученное после этого заполнение пространства тетраэдрами будет опять удовлетворять условиям а) и б) § 1, причем все числа n будут четными; иначе говоря, получится одно из трех полученных ранее заполнений.

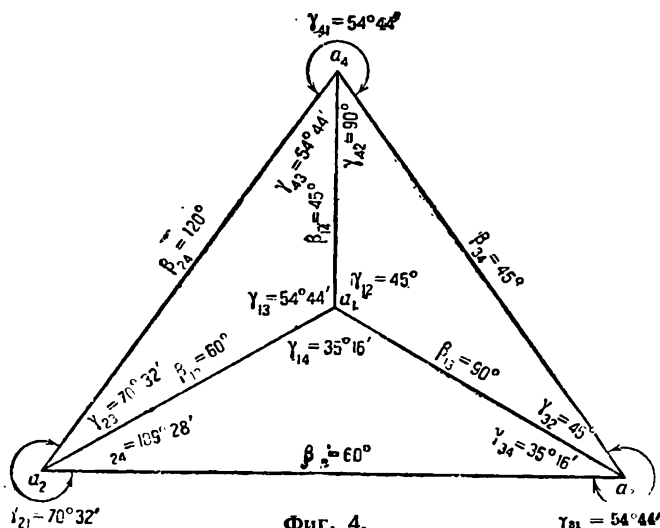
Чтобы вернуться к заполнению с одним нечетным n , нужно вновь слить воедино пары тетраэдров с общей гранью. В трех полученных нами ранее заполнениях это возможно следующими способами:

1) В случае (1) (§ 8) сливаем воедино тетраэдры, имеющие общую грань A_2 . Легко убедиться, что при таком слиянии получается тетраэдр типа (III). Следовательно, этим способом не получается интересующее нас покрытие с одним нечетным n .

2) В случае (I) (§ 8) сливаем воедино тетраэдры, имеющие общую грань A_3 . Получается тетраэдр, элементы которого приводятся в следующей таблице:

$\alpha_1 = \frac{\pi}{12}$	$\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$	$\alpha_3 = \frac{\pi}{12}$	$\alpha_4 = \frac{\pi}{6}$		
$m_1 = 48$	$m_2 = 12$	$m_3 = 48$	$m_4 = 24$	(IV)	
$\beta_{12} = 60^\circ$	$\beta_{13} = 90^\circ$	$\beta_{14} = 45^\circ$	$\beta_{23} = 60^\circ$	$\beta_{24} = 120^\circ$	$\beta_{34} = 45^\circ$
$n_{12} = 6$	$n_{13} = 4$	$n_{14} = 8$	$n_{23} = 6$	$n_{24} = 3$	$n_{34} = 8$
$\gamma_{12} = 45^\circ$	$\gamma_{13} = 54^\circ 44'$	$\gamma_{14} = 35^\circ 16'$	$\gamma_{21} = 70^\circ 32'$	$\gamma_{23} = 70^\circ 32'$	$\gamma_{24} = 109^\circ 28'$
$\gamma_{31} = 54^\circ 44'$	$\gamma_{32} = 45^\circ$	$\gamma_{34} = 35^\circ 16'$	$\gamma_{41} = 54^\circ 44'$	$\gamma_{42} = 90^\circ$	$\gamma_{43} = 54^\circ 44'$

(см. фиг. 4).



Фиг. 4.

3) Слияние тетраэдров, имеющих общую грань A_4 , дает тот же результат.

4) Слияние тетраэдров, имеющих общую грань A_1 , рассматривать не приходится, так как после этого слияния тетраэдра не получается.

5) В случае (II) слияние тетраэдров, имеющих общую грань A_1 или A_4 , тетраэдра не дает, и потому его мы рассматривать не будем.

6) Слияние тетраэдров, имеющих общую грань A_2 , дает тетраэдр типа (I) и потому не представляет интереса.

7) Слияние тетраэдров, имеющих общую грань A_3 , дает тот же результат.

8) В случае (III) тетраэдры, имеющие общую грань, при слиянии не дают тетраэдра, по какой бы грани ни происходило слияние.

Итак, существует только одно заполнение с одним нечетным n .

17. Допустим теперь, что из чисел n два числа нечетны, например n_{12} и n_{13} , или n_{12} и n_{34} , а остальные четны.

Пусть n_{12} и n_{13} нечетны. Рассуждения, подобные рассуждениям предыдущего параграфа, приводят к выводу, что

$$b_{12} = b_{13} = b_{14}, \quad b_{23} = b_{24} = b_{34},$$

причем

$$n_{12} = n_{13} = n_{14} = \text{нечетное число}; \quad n_{23} = n_{24} = n_{34} = \text{четное число}.$$

Опустим из вершины a_1 высоту на основание A_1 . Пусть a_5 — ее основание. Треугольники $a_1a_2a_5$, $a_1a_3a_5$, $a_1a_4a_5$ разбивают тетраэдр на три равных тетраэдра. Выполнив такое разбиение во всех тетраэдрах, получим новое заполнение, удовлетворяющее условиям предыдущего параграфа, т. е. заполнение типа (IV).

Чтобы обратно получить тетраэдр первоначального заполнения, следует в заполнении типа (IV) соединить вместе три тетраэдра, имеющих общее ребро. Легко убедиться (см. фиг. 4), что при таком соединении тетраэдра не получается, так что заполнений рассматриваемого типа в действительности не существует.

Если же нечетны n_{12} и n_{34} , то

$$b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24},$$

причем

$$n_{13} = n_{14} = n_{23} = n_{24} = \text{четное число}.$$

Если во всех тетраэдрах проведем плоскость через ребро b_{12} , перпендикулярно ребру b_{34} , то получим новое заполнение типа (IV). При этом ребро b_{34} с нечетным n_{34} оказывается перпендикулярным к новой грани; между тем этого нет в схеме (IV). Следовательно, заполнений этого типа также не существует.

18. Допустим, что из шести чисел n три нечетны, например

$$n_{12}, \quad n_{23}, \quad n_{34}.$$

Тогда рассуждения, подобные тем, которые были приведены в начале § 14, показали бы, что

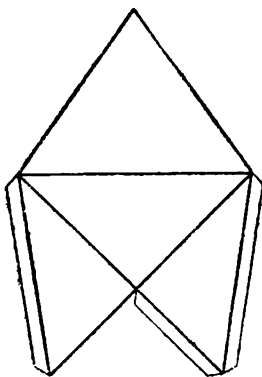
$$n_{12} = n_{13} = n_{14} = n_{23} = n_{24} = n_{34} = \text{нечетное число};$$

$$b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24} = b_{34}.$$

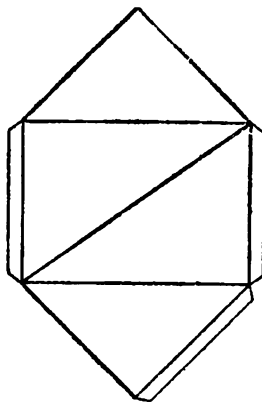
Возьмем центр тетраэдра и соединим его со всеми вершинами.

Пусть a_5 — центр. Тогда треугольники $a_1a_2a_5$, $a_1a_3a_5$, $a_1a_4a_5$, $a_2a_3a_5$, $a_2a_4a_5$, $a_3a_4a_5$ разбивают тетраэдр на четыре тетраэдра, причем, если проделать это разбиение во всех тетраэдрах разбиения,

получится новое заполнение, причем в новом заполнении три числа n нечетны, а три четны. Как мы видели в § 15, это невозможно. Следовательно, и это предположение отпадает.

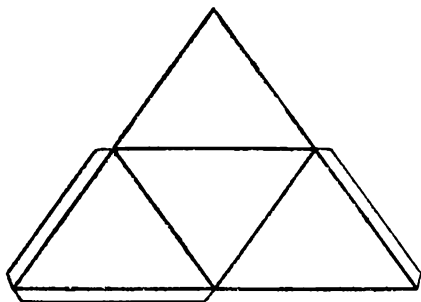


Фиг. 5.

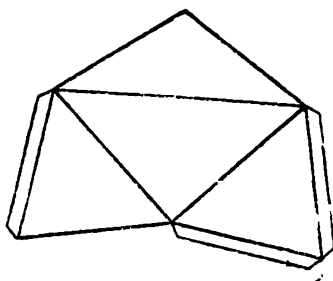


Фиг. 6.

19. Итак, все возможные заполнения пространства тетраэдрами, удовлетворяющие условиям *a)* и *б)* § 1, исчерпываются четырьмя полученными нами заполнениями [(I)—(IV)].



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Интересно отметить, что в (I), (III) и (IV) случаях симметричные тетраэдры тождественны, так что заполнение пространства достигается конгруэнтными тетраэдрами.

Фиг. 5—8 дают „выкройки“ тетраэдров, заполняющих пространство.

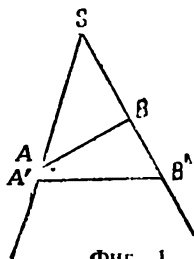
ГЕОМЕТРИЯ ПОНСЕЛЕ

(Очерк)

Н. А. Извольский (Москва)

Прошло уже более ста лет с момента выхода из печати первого издания трактата Понселе (I. V. Poncelet) „*Traité des propriétés projectives des figures*“ (1822). Этот трактат по справедливости считается началом развития новой геометрической дисциплины, называемой теперь „проективная геометрия“, а между тем столетний юбилей этой работы Понселе не был отмечен. Настоящий очерк имеет целью, хотя бы до некоторой степени, хотя бы с опозданием, восполнить сделанное упущение. Замечательная ясность и простота изложения позволяют читателю этого трактата отдохнуть от тех сложных и иногда искусственных логических построений, которыми так богато современное развитие геометрии. Желание сделать настоящий очерк понятным для большого круга читателей, заставляет вести изложение довольно подробно. Содержание этого очерка охватывает тот материал, который имеется в первом томе „*Traité des propriétés*“ (2-е издание 1864 г.); что касается второго тома, то там развивается ряд специальных вопросов, каждый из которых требует отдельного очерка. Так же точно в настоящий очерк не вошло развитие ряда положений, приводящих в конце концов к решению задачи: „вписать в данное коническое сечение многоугольник так, чтобы он был описан около другого данного конического сечения“. Это развитие требует также отдельного очерка. Заметим, что этому вопросу посвящена диссертация профессора К. А. Андреева „Многоугольники Понселе“.

1. Исходным пунктом трактата Понселе является следующее элементарное соображение. Пусть какой-либо отрезок AB (фиг. 1) проектируется из некоторой точки S ; пересекая проектирующие лучи SA и SB рядом прямых, мы получим на них отрезки $A'B'$, $A''B''$, являющиеся проекциями отрезка AB . Для каждого из отрезков AB , $A'B'$ мы получим соответствующие треугольники



Фиг. 1.

$SAB, SA'B'$, площадь каждого из которых можно выразить двояко: или $\frac{1}{2}AB \cdot p$, где p есть расстояние точки S от прямой AB , или $\frac{1}{2}a \cdot b \cdot m$, где $a = SA$, $b = SB$, а m есть некоторое постоянное, не зависящее от длины отрезков SA и SB , а зависящее от угла между этими прямыми. Отсюда имеем:

$$\frac{1}{2}AB \cdot p = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot m$$

и, следовательно,

$$AB = \frac{ab}{p} m.$$

Так же точно получим:

$$A'B' = \frac{a'b'}{p'} m, \quad A''B'' = \frac{a''b''}{p''} m \text{ и т. д.}$$

Но для отрезков $CD, C'D', \dots$, заключенных между другими прямыми SC и SD , выходящими из точки S , постоянное m изменится, и мы будем иметь:

$$CD = \frac{cd}{q} m', \quad C'D' = \frac{c'd'}{q'} m' \text{ и т. д.,}$$

где $c = SC$, $d = SD$, $c' = S'C'$ и т. д., q и q' суть расстояния прямых CD и $C'D'$ от точки S , а m' — новое постоянное, зависящее от угла CSD .

Пусть рассматривается некоторая фигура, в состав которой входят отрезки AB, CD, \dots , и пусть она обладает некоторым свойством, выражаемым равенством некоторых функций этих отрезков.

Положим теперь, что это свойство проективное, т. е. что оно остается в силе, если вместо рассматриваемой фигуры взять какую-либо ее проекцию, где отрезки AB, CD, \dots заменяются отрезками $A'B', C'D', \dots$. В таком случае, если в вышеуказанном равенстве функций отрезков AB, CD, \dots заменить их выражениями $\frac{ab}{p} m, \frac{cd}{q} m', \dots$, то a, b, c, d, p, q, \dots должны сократиться или как одинаковые множители в числителях и знаменателях дробей, входящих в это равенство, или как одинаковые множители в левой и правой частях равенства. Тогда получается равенство лишь с постоянными m, m', \dots , и оно остается таким же, если вместо отрезков AB, CD, \dots взять отрезки $A'B', C'D', \dots$, соответствующие первым в фигуре, являющейся проекцией основной фигуры $ABCD$.

Наиболее простым случаем является тот, когда расстояния p, q и т. д. сокращаются непосредственно, — с ним мы в дальнейшем и будем иметь дело. Например, этот случай будет иметь место, когда берется отношение двух отрезков, расположенных на одной прямой.

2. В качестве первого примера Понселе рассматривает четыре точки A, B, C и D , расположенные на одной прямой, причем точки C и D делят отрезок AB внутренним и внешним образом в одинаковом отношении, что дает равенство:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \quad 1).$$

Это равенство удовлетворяет, как легко видеть, признаку § 1, а потому свойство этих четырех точек является проективным, т. е. если эти точки спроектировать из любого центра на любую другую прямую, то на ней получим новые четыре точки A', B', C', D' , являющиеся проекциями точек A, B, C и D , и для них будет иметь место такое же равенство:

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{D'A'}{D'B'}.$$

Развивая это соотношение, Понселе дает полную теорию гармонических точек, а во втором томе своего трактата дает ряд обобщений.

Мы на этом останавливаться не будем, так как учение о гармонических точках довольно известно.

3. Вторым примером проективных свойств является следующее:

Пусть круг пересечен прямыми AB, BC и CA (фиг. 2), образующими треугольник ABC . Тогда, если P, P', Q, Q', R и R' —точки пересечения, имеем:

$$AP \cdot AP' = AR \cdot AR',$$

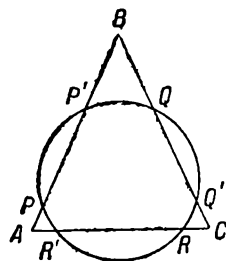
$$BQ \cdot BQ' = BP \cdot BP',$$

$$CR \cdot CR' = CQ \cdot CQ',$$

откуда получим:

$$AP \cdot AP' \cdot BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' = AR \cdot AR' \cdot BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ'.$$

Легко видеть, что если проектировать всю фигуру из какой-либо точки S , не лежащей в плоскости этой фигуры, то отрезки SA, SP, SP', SB, \dots , а равно и перпендикуляры из S на прямые AB, BC и CA сократятся при замене каждого из входящих в полученное равенство отрезков его выражением по формуле $\frac{ab}{p} \cdot m$, полученной в § 1. Поэтому это соотношение является



Фиг. 2.

¹⁾ В настоящее время это равенство пишется в форме:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{DB} \quad \text{или} \quad \frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}.$$

Следует заметить, что в дальнейшем Понселе очень внимательно относится к знакам отрезков.

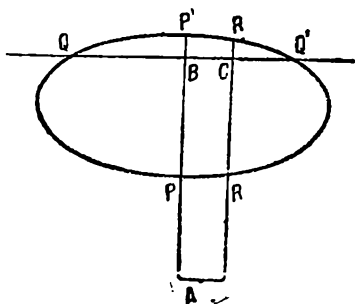
проективным свойством рассматриваемой фигуры, и оно остается справедливым для новой фигуры, являющейся проекцией, рассматриваемой из любой точки S пространства на новую плоскость.

Так как при таком проектировании на новой плоскости вместо круга получим или эллипс или гиперболу или параболу, то соотношение

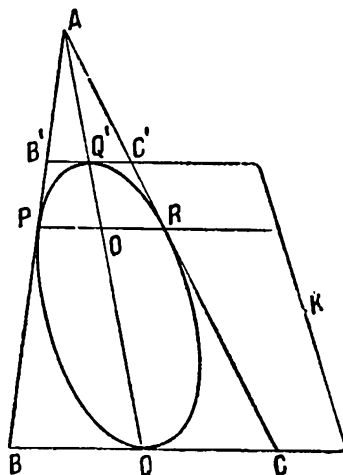
$$AP \cdot AP' \cdot BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' = AR \cdot AR' \cdot BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ' \quad (1)$$

должно быть справедливым для всякого конического сечения, пересекаемого тремя прямыми.

4. Интересно развитие этого соотношения, делаемое Понселе. Пусть точка A удаляется в бесконечность; тогда AB и AC парал-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

лельны (фиг. 3) и отношение $\frac{AP \cdot AP'}{AR \cdot AR'}$ делается равным единице, а потому равенство (1) обращается в

$$BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' = BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ'$$

или

$$\frac{BP \cdot BP'}{BQ \cdot BQ'} = \frac{CR \cdot CR'}{CQ \cdot CQ'}. \quad (2)$$

Если принять прямую BC за ось абсцисс, а ось ординат считать параллельной прямым AD и AC , то предыдущее равенство можно выразить так:

Произведение ординат находится в постоянном отношении к произведению абсцисс для всех параллельных секущих конического сечения при неизменной оси абсцисс.

Пусть теперь треугольник ABC описан около конического сечения (фиг. 4). Тогда $AP = AP'$, $BP = BP'$, $BQ = BQ'$ и т. д. и равенство (1) обратится в

$$AP \cdot BQ \cdot CR = AR \cdot BP \cdot CQ.$$

Пусть еще описанный треугольник ABC обладает тем свойством, что хорда PR , соединяющая точки касания сторон AB и AC , параллельна стороне BC . Тогда

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AR}{CR}$$

и, следовательно,

$$AP \cdot CR = BP \cdot AR,$$

а потому предыдущее равенство для этого случая дает

$$BQ = CQ,$$

т. е. точка касания третьей стороны треугольника ABC лежит на его медиане.

Если теперь мы возьмем вторую касательную к коническому сечению, параллельную PR , касательную $B'C'$, то также получим, что ее точка касания Q' лежит на медиане треугольника ABC , а по параллельности прямых BC , $B'C'$ и PR середина отрезка PR , точка O , лежит на той же медиане, и ясно, что это имеет место для всех хорд, параллельных касательной BC . Поэтому:

Средины всех параллельных хорд конического сечения, а также точки пересечения касательных к нему в концах каждой хорды (точка A есть точка пересечения касательных PA и RA в концах хорды PR), расположены на одной прямой.

Эта прямая называется диаметром конического сечения.

Если теперь рассмотреть треугольник $BB'K$, где точка K есть бесконечно удаленная общая точка параллельных касательных BC и $B'C'$ и применить к нему равенство (2), то получим:

$$\frac{BQ}{BP} = \frac{B'Q'}{B'P},$$

откуда

$$\frac{BP}{B'P} = \frac{BQ}{B'Q'},$$

но ввиду того, что $BC \parallel B'C' \parallel PR$, имеем:

$$\frac{BP}{B'P} = \frac{OQ}{OQ'} \quad \text{и} \quad \frac{BQ}{B'Q'} = \frac{AQ}{AQ'}.$$

Следовательно,

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{AQ}{AQ'},$$

т. е. хорда диаметра QQ' делится гармонически точкой пересечения его с какой-либо из хорд, которую он делит пополам, и точкой пересечения касательных в концах этой последней хорды.

Если один из концов диаметра QQ' , например Q , удаляется в бесконечность, что непременно имеет место для параболы, то

$$\frac{OQ}{AQ} = 1,$$

и, следовательно,

$$OQ' = AQ',$$

т. е. отрезок диаметра параболы, заключенный между хордой, которая делится этим диаметром пополам, и точкой пересечения касательных к параболе в концах этой хорды, делится самой параболой пополам.

Назовем те хорды, которые делятся диаметром конического сечения пополам, сопряженными с этим диаметром, и обратно, диаметр сопряжен с этими хордами или с их общим направлением.

Пусть теперь MN и PR (фиг. 5) — две параллельные хорды некоторого конического сечения, и AB — диаметр, им сопряженный. Тогда равенство (2) приводит к

$$\frac{OM^2}{OA \cdot OB} = \frac{QP^2}{QA \cdot QB}$$

(ибо $OM = ON$ и $QP = QR$).

т. е. если построим диаметр конического сечения и сопряженные ему хорды, то отношение квадрата полухорды к произведению отрезков диаметра, на которые он делится этой хордой, постоянно.

Если теперь C — середина диаметра AB и DE — диаметр, сопряженный с AB (т. е. параллельный MN и PR), то

$$AC = CB,$$

и получим, что это постоянное отношение равно

$$\left(\frac{CD}{AC}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

Фиг. 5.

где b и a — половины наших сопряженных диаметров DE и AB . Назовем это постоянное отношение через p ; тогда

$$OM^2 = p \cdot OA \cdot OB. \quad (3)$$

Для параболы дело несколько видоизменяется: если конец диаметра b уходит в бесконечность, то

$$\frac{OB}{QB} = 1$$

и

$$\frac{OM^2}{OA} = \frac{QP^2}{QA} = \text{const.}$$

Отсюда, называя это постоянное через p , получим:

$$OM^2 = p \cdot OA. \quad (4)$$

Здесь $p = \frac{QP^2}{QA}$ выражает собою отрезок, называемый параметром параболы (по отношению к рассматриваемому диаметру), между тем как для других конических сечений $p = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ есть отвлеченное число.

Обратное положение таково: если дан отрезок AB , который должен служить диаметром конического сечения, и одна из сопряженных ему хорд PQR , делящаяся в точке Q пополам диаметром AB (можно задать на произвольной прямой, пересекающей AB в точке Q , две точки P и R так, чтобы $QP = QR$), то коническое сечение вполне определено, так как $p = \frac{PQ^2}{AQ \cdot BQ}$, и на каждой прямой, параллельной PR , если она пересекается с AB в точке Q' , можно получить две точки этого конического сечения P' и R' так, что $Q'P'^2 = Q'R'^2 = p \cdot Q'A \cdot Q'B$. Если данная хорда PR пересекает AB в точке, расположенной внутри отрезка AB , то $p = \frac{PQ^2}{AQ \cdot BQ}$ есть число отрицательное, и мы получим действительные точки P' и R' тогда, когда точка Q' находится между A и B , и мнимые, — если она вне отрезка AB , так как коническое сечение есть эллипс.

Наоборот, если Q находится вне отрезка AB , то получим гиперболу.

5. Существенным для геометрии Понселе является построение хорды, высекаемой на данной прямой определенным коническим сечением: надо построить диаметр, сопряженный направлению данной прямой и, зная постоянное p , построить отрезок OX , определяемый равенством $OX^2 = p \cdot OA \cdot OB$, где O есть точка пересечения данной прямой с диаметром AB , а A и B — концы этого диаметра, сопряженного направлению данной прямой. Понселе распространяет это построение и на тот случай, когда данная прямая расположена целиком вне конического сечения, — он заменяет здесь отрицательное значение выражения $p \cdot OA \cdot OB$ таковым же положительным; полученную хорду он называет „идеальной“, оставляя термин „мнимая“ на случай, когда данная прямая мнимая.

Если таким образом построить для конического сечения, имеющего параметр p , ряд идеальных хорд на параллельных прямых, концы которых определяются равенством $OX^2 = p' \cdot OA \cdot OB$, где $p' = -p$, а точка O есть точка пересечения каждой из этих параллельных прямых с сопряженным им диаметром AB данного конического сечения, то получим новое коническое сечение, которое Понселе называет дополнительным к данному относительно направления данных параллельных. Оно касается данного конического сечения в концах диаметра AB и отрезок AB служит диаметром обоих конических сечений. Для каждого конического сечения можно построить бесконечно много дополнительных, каждое из которых соответствует одному из диаметров данного.

Здесь возникает задача: построить общие хорды двух данных конических сечений.

Конечно, существенно решить эту задачу для случая, когда данные конические сечения не имеют общих действительных точек и их общие хорды являются идеальными.

В основу решения этой задачи Понселе ставит два положения: 1) диаметры обоих конических сечений, сопряженные направлению общей хорды, должны встречать ее в одной и той же точке, в середине общей хорды; 2) если назвать эту точку O и если AB и $A'B'$ суть диаметры данных конических сечений, сопряженные с этой общей хордой и p и p' —соответствующие этим диаметрам параметры конических сечений, то должно иметь место равенство:

$$p \cdot OA \cdot OB = p' \cdot OA' \cdot OB'.$$

Понселе прежде всего выясняет существование бесконечного множества точек O и соответствующих прямых: если (C) и (C') —данные конические сечения, то построим к ним две пары параллельных касательных, точки касания которых дадут диаметры AB и $A'B'$ данных конических сечений, сопряженные с направлением построенных параллельных касательных; точка пересечения AB и $A'B'$ и есть искомая точка O , а прямая mn , построенная через O параллельно касательным, и есть та прямая, которая выделяет на конических сечениях хорды (действительные или идеальные) с общей серединой O . Геометрическим местом точек O служит некоторая кривая, проходящая через центры данных конических сечений (в самом деле, если в одном коническом сечении взять диаметр, проходящий через центр другого, то соответствующий ему диаметр этого другого конического сечения имеет с ним лишь одну общую точку, а именно центр второго).

Однако не на всякой прямой mn , полученной выше, будет общая хорда конических сечений: пусть M и N суть концы хорды, отсекаемой на mn коническим сечением (C) , а M' и N' —концы хорды, отсекаемой (C') ; вообще говоря, M и N не совпадают с M' и N' . Понселе общими соображениями доказывает, что должны существовать такие положения точки O и соответствующей прямой mn , для которых имеет место такое совпадение. Эти соображения основываются на том, что вышеупомянутые точки M и M' должны описывать непрерывные кривые, имеющие действительные общие точки. Мы минуем эти общие соображения главным образом потому, что здесь как будто чувствуется пробел. Понселе не исследует кривые, описываемые точками O , M и M' , вместо этого он переходит к пространственным построениям, связанным с кривыми, получаемыми сечениями плоскостями конуса второго порядка. На этом и мы должны остановиться.

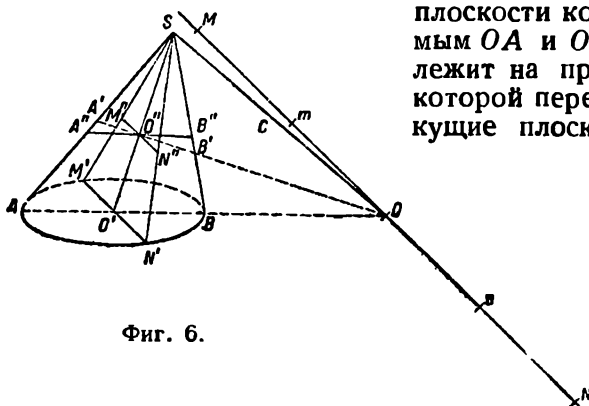
6. Если конус второго порядка пересечь двумя плоскостями, пересекающимися по прямой MN , то на этой прямой и должна находиться общая хорда полученных в сечениях конических сечений; если теперь одну из секущих плоскостей повернуть около MN так, чтобы она совпала с другою, причем не изменять имевшееся на ней коническое сечение, то получим два конических сечения на одной плоскости, и их общая хорда должна располагаться также на прямой MN . Это очевидно для случая, когда полученные

ные в сечениях конуса плоскостями два конических сечения имеют две действительных общих точки. Остановимся на случае, когда они не имеют действительных общих точек.

Пусть S (фиг. 6) есть вершина конуса и пусть две секущих плоскости пересекаются по прямой mn . Известно, и это легко видеть, что середины всех параллельных хорд конуса второго порядка расположены в одной диаметральной плоскости этого конуса,—она проходит через его вершину S .

Пусть $SABO$ есть диаметральной плоскостью конуса, сопряженной прямой mn ,—она пересекает конус по образующим SA и SB и делит пополам всякую хорду $M'N'$, параллельную mn . Пусть

она пересекает секущие плоскости конуса по прямым OA и OA' ,—точка O лежит на прямой mn , по которой пересекаются секущие плоскости. Тогда



Фиг. 6.

AB и $A'B'$ будут диаметры получаемых конических сечений, сопряженные прямой mn . Поэтому первое условие для того, чтобы общая хорда наших конических сечений находилась на прямой mn , выполнено.

Если p и p' суть постоянные для конических сечений (AB) и $(A'B')$, соответствующие диаметрам AB и $A'B'$, то второе условие требует, чтобы

$$p \cdot OA \cdot OB = p' \cdot OA' \cdot OB'$$

(тогда будем иметь, что $OM = OM'$).

Пересечем еще наш конус плоскостью, параллельной плоскости (AB) , так, чтобы новое коническое сечение имело с коническим сечением $(A'B')$ две действительных общих точки, пусть это есть коническое сечение $(A''B'')$ и пусть его диаметр $A''B''$, параллельный AB , пересекается с $A'B'$ в точке O'' , лежащей внутри отрезков $A'B'$ и $A''B''$. Тогда очевидно, если p'' есть постоянное, соответствующее диаметру $A''B''$ конического сечения $(A''B'')$, имеем:

$$p \cdot O''A' \cdot O''B' = p'' \cdot O''A'' \cdot O''B''.$$

Но если $M''N''$ есть хорда конического сечения $(A''B'')$, проходящая через O'' и параллельная $M'N'$, то середины O'' и O' этих

хорд лежат на одной прямой с точкой S . Поэтому из подобия треугольников получаем:

$$\frac{O'M'}{O''M''} = \frac{SO'}{SO''} \quad \frac{O'A}{O''A''} = \frac{OB}{O''B''} = \frac{SO'}{SO''},$$

откуда

$$\frac{O'M'^2}{O'A \cdot OB} = \frac{O''M''^2}{O''A'' \cdot O''B''},$$

или

$$p = p''.$$

Нетрудно также из подобия треугольников получить, что

$$\frac{O''A''}{OA} = \frac{O''A'}{OA'} \quad \text{и} \quad \frac{O''B''}{OB} = \frac{O''B'}{OB'}.$$

Следовательно:

$$\frac{O''A'' \cdot O''B''}{OA \cdot OB} = \frac{O''A' \cdot O''B'}{OA' \cdot OB'},$$

или

$$\frac{OA \cdot OB}{OA' \cdot OB'} = \frac{O''A'' \cdot O''B''}{O''A' \cdot O''B'}.$$

Но из вышеприведенного равенства $p \cdot O''A'' \cdot O''B'' = p' \cdot O''A' \cdot O''B'$ следует, что

$$\frac{O''A'' \cdot O''B''}{O''A' \cdot O''B'} = \frac{p'}{p}.$$

Поэтому

$$\frac{OA \cdot OB}{OA' \cdot OB'} = \frac{p'}{p},$$

или

$$p \cdot OA \cdot OB = p' \cdot OA' \cdot OB'.$$

Итак, выполнено и второе условие. Поэтому действительно на прямой mn располагается идеальная общая хорда MN конических сечений (AB) и $(A'B')$.

Можно также доказать и обратное положение: если имеем два конических сечения, расположенных в разных плоскостях, причем на линии пересечения этих плоскостей располагается их общая хорда (идеальная), то существует конус, на котором помещаются оба конических сечения.

7. Пусть теперь плоскость $(A'B')$, поворачиваясь вокруг прямой mn , пройдет через точку S , вершину конуса; тогда получим бесконечно малое коническое сечение, которое имеет относительно направления SO такое же постоянное p' , как и любое коническое сечение, получаемое от пересечения конуса параллельною плоскостью, относительно диаметра, параллельного SO (фиг. 6). Эта прямая SO может быть рассматриваема как диаметр бесконечно малого конического сечения, сопряженный с идеальною секущею mn . Так как тогда MN есть общая хорда этого беско-

нечно малого конического сечения и конического сечения (AB) , то имеем:

$$OM^2 = p \cdot OA \cdot OB = p' \cdot OS^2.$$

Отсюда, имея в виду, что

$$p' = \left(\frac{b'}{a'}\right)^2,$$

получим:

$$\frac{OM}{OS} = \frac{b'}{a'},$$

т. е. отношение сопряженных диаметров полученного бесконечно малого конического сечения равно отношению OM к OS (причем OM и OS параллельны этим диаметрам).

Если плоскость (SMN) параллельна круговому сечению конуса, то $OS \perp MN$ и $OM = OS$, ибо в круге сопряженные диаметры взаимно перпендикулярны и равны.

З а м е ч а н и е. Понселе при изучении идеальных хорд устанавливает понятие о полюсах и полярах относительно конического сечения, а также дает учение о пучках кругов и радикальной оси.

8. Сущность проективных свойств фигур ведет к заключению: если имеем какую-либо фигуру и если для одной ее проекции, обладающей большей простотой сравнительно с данной фигурой, можно получить какую-либо зависимость проективного характера, то аналогичная зависимость должна иметь место и для данной фигуры.

Поэтому для Понселе важно установить, в какие фигуры преобразуется данная при проектировании ее из разных центров. Прежде всего здесь ясны следующие положения:

1) Какая-либо плоская фигура, содержащая несколько прямых или кривых, сходящихся в одной точке, может быть при помощи проектирования на другую плоскость преобразована в такую, что соответствующие прямые будут параллельны, а соответствующие кривые асимптотически приближаются к направлению этих прямых (другими словами: чтобы проекции всех этих линий имели общую точку в бесконечности).

Для достижения этого надо за плоскость проекции выбрать плоскость, параллельную прямой, соединяющей центр проекции с общей точкой рассматриваемых линий.

Отсюда Понселе делает вывод о существовании на прямой лишь одной бесконечно удаленной точки.

2) Всякая плоская фигура, в которой имеется некоторая прямая, может быть рассматриваема, как проекция другой плоской фигуры, причем вышеуказанная прямая является проекцией бесконечно удаленной прямой, принадлежащей ко второй фигуре; таким образом все линии, сходящиеся в какой-либо точке указанной прямой первой фигуры, являются проекциями линий

второй фигуры, сходящихся в бесконечно удаленной точке (прямые параллельны, а кривые асимптотически приближаются к их направлению), и обратно.

Здесь плоскость проекции должна быть параллельна плоскости, соединяющей центр проекции с указанной прямой.

Отсюда Понселе делает заключение, что все бесконечно удаленные точки плоскости расположены на одной прямой.

Для нашего очерка наиболее существенным является следующее положение:

Если в состав плоской фигуры входит коническое сечение и прямая, то она может быть рассматриваема, как проекция фигуры, где данному коническому сечению соответствует круг, а данной прямой — бесконечно удаленная прямая.

Доказательство таково: пусть имеем коническое сечение (AB) и прямую mn (фиг. 6). Если S есть желаемый центр проекции, то прежде всего плоскость проекции должна быть параллельна плоскости Smn . Так как эта плоскость должна пересекать конус по кругу, то прямая mn должна быть идеальной секущей конического сечения (AB), — иначе плоскость проекции пересекала бы конус по коническому сечению, имеющему две бесконечно удаленных действительных точки, — например плоскость, параллельная плоскости $SM'N'$, дала бы кривую, имеющую две бесконечно удаленных точки в направлениях SM' и SN' (фиг. 6).

Далее, как получено в § 7, OM , половина идеальной хорды MN , должно быть равно OS , причем $OS \perp OM$. Потому, если данная прямая mn не имеет действительных общих точек с данным коническим сечением, искомым центр проекции S может быть получен так: через середину O идеальной хорды конического сечения (AB), расположенной на данной прямой mn , строим плоскость, перпендикулярную к mn , и на ней строим круг, принимая середину хорды MN , точку O , за центр и OM за радиус, любая точка этого круга явится искомым центром проекции, а плоскостью проекции может служить любая плоскость, параллельная плоскости, определяемой прямой mn и выбранным центром проекции.

Если прямая mn есть действительная секущая данного конического сечения (AB), то получим мнимый круг, и центр проекции располагается на мнимом круге, лежащем в действительной плоскости, перпендикулярной к прямой mn и проходящей через середину хорды, расположенной на этой прямой.

Мы можем в последнем случае выбрать центр и плоскость проекции так, чтобы коническое сечение (AB) спроектировалось в действительную равностороннюю гиперболу.

Известно, что если плоскость пересекает конус второго порядка по гиперболу, то асимптоты этой гиперболы параллельны тем образующим конуса, по которым конус пересекается плоскостью, проходящей через вершину конуса и параллельной плоскости гиперболы. Чтобы получить равностороннюю

гиперболу, надо, чтобы эти образующие были взаимно перпендикулярны.

Поэтому, если данная прямая есть $M'N'$ (фиг. 6), то за центр проекции можно взять любую точку сферы, диаметром которой служит хорда $M'N'$, а плоскостью проекции будет служить любая плоскость, параллельная плоскости, определяемой прямою $M'N'$ и выбранным центром проекции.

Дальнейшее развитие этого положения приводит к заключению: плоская фигура, в состав которой входят два конических сечения, может быть, вообще говоря, рассматриваема, как проекция другой плоской фигуры, в которой этим коническим сечениям соответствуют два круга.

Остановимся лишь на случае, когда рассматриваемые конические сечения имеют хотя бы одну идеальную общую хорду. Тогда согласно предыдущему можно выбрать центр проекций так, чтобы эта идеальная общая секущая преобразовывалась в бесконечно удаленную прямую (плоскость проекции параллельна плоскости, определяемой общей хордой конических сечений и центром проекции) и чтобы проекция одного конического сечения оказалась кругом; тогда, само собой, проекция другого конического сечения окажется также кругом, ибо все условия для этого будут выполнены. Геометрическим местом центров проекций, удовлетворяющих этим условиям, будут круги, описанные в плоскостях, перпендикулярных к идеальным общим хордам конических сечений через их середины, причем эти середины должны служить центрами кругов, а половины хорд — радиусами.

Также:

Если несколько конических сечений, входящих в состав плоской фигуры, имеют одну и ту же идеальную общую хорду, то можно получить проекцию этой фигуры так, чтобы этим коническим сечениям соответствовали круги, а общей их идеальной секущей — бесконечно удаленная прямая новой плоскости.

Далее, получаем другой ряд положений, за исходный пункт которых можно принять следующее:

Если проектировать коническое сечение из любого центра на любую плоскость, то проекциями полюса и соответствующей поляры относительно этого конического сечения будут служить полюс и поляра относительно нового конического сечения.

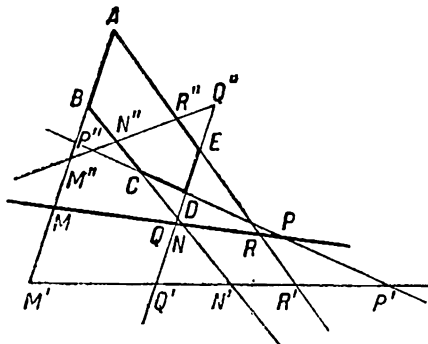
Если проектировать из какого-либо центра коническое сечение и прямую, расположенные в одной плоскости, на новую плоскость, параллельную плоскости, определяемой этой прямой и центром проекции, то этой прямой будет соответствовать бесконечно удаленная прямая новой плоскости, а полюс этой прямой даст в проекции центр нового конического сечения (центр кривой второго порядка есть полюс бесконечно удаленной прямой относительно этой кривой).

Обратно: если коническое сечение проектируется на новую плоскость из какого-либо центра, то проекцией центра этого

конического сечения будет служить полюс той прямой, которая служит проекцией бесконечно удаленной прямой плоскости, на которой расположено данное коническое сечение.

Плоская фигура, в состав которой входит коническое сечение и точка, может быть рассматриваема, как проекция другой плоской фигуры, в которой этому коническому сечению соответствует круг, а данной точке—центр этого круга (чтобы круг оказался действительным, надо, чтобы данная точка находилась во внутренней области данного конического сечения).

Мы не останавливаемся на доказательствах этих положений, так как, с одной стороны, они очень ясны, а, с другой—в этом очерке ими не придется пользоваться.



Фиг. 7.

9. Понселе прежде всего применяет свой метод к „геометрии трансверселей“. Этим именем он называет метрические свойства фигур, составленных из прямых, причем они пересекаются или также прямыми, или даже кривыми—последние и называются трансверселями. Здесь Понселе дает лишь новый метод получения уже известных резуль-

татов, имеющих главным образом в трактатах Карно (Carnot) „Géométrie de position“ и „Essai sur la théorie des transversales“.

В основу Понселе ставит теорему:

если все стороны AB, BC, CD, DE, EA (фиг. 7) какого-либо плоского многоугольника пересечены какою либо прямою (трансверсалью) и точки пересечения суть соответственно M, N, P, Q, R , то на каждой стороне многоугольника получается по два отрезка, считая от вершин многоугольника до трансверсали, и эти отрезки связаны так, что произведение тех из них, которые не имеют общих концов, равно произведению остальных, т. е.

$$AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ \cdot ER = AR \cdot BM \cdot CN \cdot DP \cdot EQ.$$

Справедливость этой теоремы доказывается так:

Очевидно, что если эта зависимость существует, то она есть проактивное свойство, так как здесь удовлетворяются условия § 1; поэтому (§ 8), если это свойство справедливо для какой-либо более простой фигуры, получаемой при помощи проектирования, то оно справедливо и для рассматриваемой. На основании того же § 8 можно получить такую проекцию этой фигуры, чтобы трансверсаль MR проектировалась в бесконечно удаленную прямую новой плоскости; тогда все отрезки делаются бесконечными и,

например, отношение $\frac{AM}{BM}$ становится равным единице, откуда и следует справедливость доказываемого равенства.

Если имеем другую трансверсаль M_1R_1 , то и для нее справедливо такое же равенство, также для M_2R_2 , M_3R_3 и т. д. Если обозначим через (AM) произведение $AM \cdot AM_1 \cdot AM_2 \dots$, сколько бы трансверсали ни было, то, перемножая по частям равенства, получаемые для каждой трансверсали, получим:

$$(AM) \cdot (BN) \cdot (CP) \cdot (DQ) \cdot (ER) = (AR) \cdot (BM) \cdot (CN) \cdot (DP) \cdot (EQ).$$

Это соотношение имеет место для любого плоского многоугольника, пересекаемого системой прямолинейных трансверсали.

Можно распространить это свойство на пространственный многоугольник, пересекаемый сначала одной, а затем несколькими плоскостями, для чего надо взять центр проекции на рассматриваемой плоскости — трансверсали, а за плоскость проекций — любую плоскость; тогда на последней получим плоский многоугольник, трансверсалью которого служит прямая пересечения двух указанных плоскостей.

10. Далее, можно распространить это свойство на случай, когда плоский многоугольник пересекается коническим сечением, и на случай, когда пространственный многоугольник пересекается поверхностью второго порядка.

В § 3 мы получили, что если треугольник ABC пересекается кругом в точках P , P' , Q , Q' , R и R' , то:

$$AP \cdot AP' \cdot BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' = AR \cdot AR' \cdot BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ'.$$

Совершенно такое же соотношение можно получить для любого многоугольника, пересекаемого кругом, а проектируя его из любого центра на любую плоскость, перейдем к пересечению многоугольника коническим сечением. Если (AM) будет обозначать произведение двух отрезков AM и AM' , считая от вершины A до точек пересечения стороны AB с коническим сечением, и если (BN) , (CP) , ... имеют аналогичный смысл, то для многоугольника $ABCDE$, пересекаемого коническим сечением, получим:

$$(AM) \cdot (BN) \cdot (CP) \cdot (DQ) \cdot (ER) = (AR) \cdot (BM) \cdot (CN) \cdot (DP) \cdot (EQ).$$

Пусть теперь имеем пространственный многоугольник, пересекаемый поверхностью второго порядка. Легко и для этого случая получить аналогичное равенство. В самом деле, оно очевидно справедливо для треугольника, ибо там все будет происходить в одной плоскости. Разобьем теперь пространственный многоугольник на треугольники диагоналями и, написав эти равенства для каждого треугольника, перемножим их. Тогда произведения отрезков на диагоналях войдут в обе части равенства и сократятся.

11. Пусть теперь или коническое сечение или поверхность второго порядка касается всех сторон плоского или простран-

ственного многоугольника. Тогда $(AM) = AM^2$ (если M есть точка касания стороны AB), $(AN) = AN^2$ и т. д., и предыдущее равенство приведет к

$$AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ \cdot ER = AR \cdot BM \cdot CN \cdot DP \cdot EQ,$$

где M, N, P, Q, R суть точки касания сторон AB, BC, CD, DE, EA , т. е.: если стороны плоского или пространственного многоугольника касаются каждой соответствующей кривой или поверхности второго порядка, то на каждой из них получается по два отрезка (от одной из двух вершин до точки касания) и произведение всех несмежных отрезков равно произведению всех остальных.

Это свойство совершенно совпадает с полученным в § 9: если пространственный многоугольник $ABCDE$ пересекается плоскостью в точках M, N, P, Q, R , то $AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ \cdot ER = AR \cdot BM \cdot CN \cdot DP \cdot EQ$. Поэтому, если заведомо известно, что точки касания M, N, P и Q сторон AB, BC, CD и DE пространственного многоугольника $ABCDE$ к поверхности второго порядка расположены в одной плоскости, то, называя через R' точку пересечения этой плоскости со стороны AE , получим:

$$AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ \cdot ER' = AR' \cdot BM \cdot CN \cdot DP \cdot EQ.$$

Но для поверхности второго порядка, касающейся тех же сторон в точках M, N, P, Q и R , имеем:

$$AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ \cdot ER = AR \cdot BM \cdot CN \cdot DP \cdot EQ,$$

откуда следует:

$$\frac{ER'}{AR'} = \frac{ER}{AR},$$

т. е. R' точки и R делят отрезок AE в одном и том же отношении, что означает совпадение точек R' и R . Игак, если все стороны пространственного многоугольника касаются поверхности второго порядка и если известно, что все точки касания кроме одной расположены в одной плоскости, то и последняя точка касания лежит в той же плоскости.

Отсюда следствие:

Четыре точки касания четырех сторон пространственного четырехугольника к поверхности второго порядка обязательно расположены в одной плоскости.

12. Далее, Понселе рассматривает ряд проективных соотношений для треугольников и многоугольников: теоремы Чевы и Менелая, распространяя их и на многоугольники, теорему Дезарга,—на этом мы останавливаться не будем. Отметим лишь (без доказательства) одно интересное свойство.

Во всяком плоском шестиугольнике, три несмежных стороны которого сходятся в одной точке и остальные три стороны тоже сходятся в одной точке, три его главных диагонали должны проходить также через одну точку.

Мы перейдем сразу к интересному доказательству теоремы Паскаля.

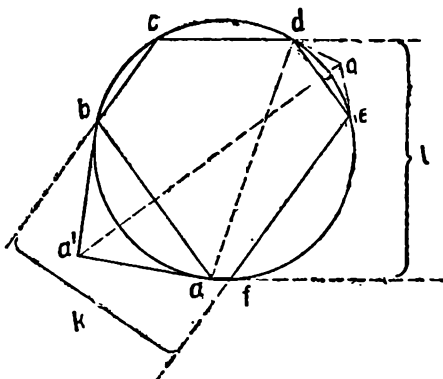
Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в коническое сечение. Пусть три пары его противоположных сторон пересекаются в точках I , K и L (фиг. 8). Остановимся на прямой KL , соединяющей две из этих точек. Согласно § 8 мы можем всю фигуру рассматривать, как проекцию другой, в которой коническому сечению соответствует круг и прямой — бесконечно удаленная прямая плоскости этого круга. Тогда на этой плоскости получим шестиугольник $acdef$ (фиг. 8), две пары (а именно bc и ef , cd и fa) противоположных сторон которого должны быть параллельны, ибо они сходятся в точках k и l бесконечно удаленной прямой. Тогда $\angle bcd = \angle efa$, откуда следует, что $\sphericalangle bcd = \sphericalangle efa$. Если построим диагональ ad , то полученное равенство дуг приводит к равенству $\angle bad = \angle ade$, т. е. $ab \parallel de$. Поэтому стороны ab и de сходятся в точке i , лежащей на бесконечно удаленной прямой. Итак, все три точки k , l и i расположены на одной прямой. Поэтому и точки K , L и I в первоначальной фигуре также расположены на одной прямой.

Для теоремы Брианшона Понселе дает два доказательства: одно основано на свойствах полюсов и поляр, а другое — на методе проектирования. Изложим второе. Сделаем сначала два предварительных замечания.

1. Если около конического сечения описан шестиугольник, то, соединяя точки касания его сторон, получим описанный шестиугольник; если к полученной фигуре применить то проектирование, какое только что было изложено при доказательстве теоремы Паскаля, то на плоскости проекции получим круг, вписанный в него шестиугольник и описанный шестисторонник $a'b'c'd'e'f'$, стороны которого касаются круга в точках a, b, c, d, e и f , причем $bc \parallel ef$, $cd \parallel fa$ и, как уже выяснилось, $ab \parallel de$.

2. Если в круге имеем две параллельных хорды, то точки пересечения двух пар касательных в концах каждой хорды определяют собою диаметр этого круга, что очевидно.

После этого ясно, что прямая, соединяющая две противоположных вершины a' и d' нашего описанного шестисторонника, проходит через центр круга; то же имеем и для двух других пар противоположных вершин описанного шестисторонника. Итак, все три главных диагонали этого шестисторонника проходят через



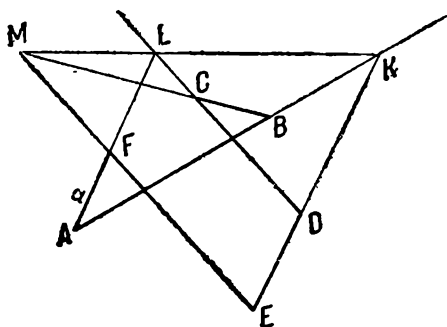
Фиг. 8.

центр круга, т. е. через одну точку. Поэтому в начальной фигуре, где бесконечно удаленной прямой kli соответствует собственная прямая KLI , три главных диагонали описанного шестиугольника сходятся в одной точке, а именно в полюсе прямой KLI (см. конец § 8).

13. Интересно еще проследить развитие общеизвестного построения точек конического сечения по пяти его данным точкам, построения, основанного на теореме Паскаля и выполняемого при помощи одной линейки.

Приводим это построение:

Пусть даны пять точек конического сечения A, B, C, D и E (фиг. 9), примем их за пять последовательных вершин вписанного в это коническое сечение



Фиг. 9.

шестиугольника, а его шестую вершину определим на любой прямой a , проходящей через точку A . Тогда AB и DE явятся одной парой противоположных сторон этого шестиугольника, и легко получить их общую точку K ; прямая a , на которой должна лежать шестая вершина, вместе с прямой CD дают другую пару противоположных сторон,—пусть их общая точка есть L ; тогда определится паскалева прямая KL , которая с BC пересекается в некоторой точке M . Построив прямую EM , найдем шестую сторону шестиугольника, а пересечение EM с a дает шестую точку F нашего конического сечения.

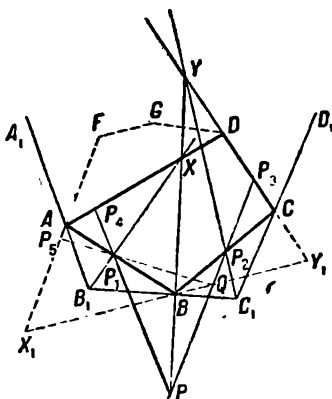
Заметим теперь, что в этом построении точки A, B, C, D, E и K неподвижны, а точки L, M и F передвигаются в зависимости от вращения прямой a около точки A . Тогда мы увидим здесь треугольник FML , все три стороны которого вращаются около неподвижных точек (полюсов, как их называет Понселе): ML около K , MF около E и FL около A , и две вершины которого M и L скользят по неподвижным прямым (директрисам): M по прямой BC и L по CD . Тогда, согласно теореме Паскаля, третья его вершина, свободная, F должна двигаться по коническому сечению, определяемому точками A, B, C, D и E , и это коническое сечение, следовательно, проходит через полюсы тех сторон треугольника MLF , которые прилегают к свободной вершине F , через точки A и E . Итак, если все три стороны треугольника вращаются вокруг трех неподвижных точек (полюсов), а две его вершины скользят по неподвижным прямым (директрисам), то его свободная вершина описывает коническое сечение, проходящее через полюсы двух сторон, прилежащих к свободной вершине.

Заметим еще, что это коническое сечение проходит через точку пересечения директрис, описываемых несвободными вершинами M и L , т. е. через точку C .

Если какие-либо три из данных точек (а может быть и четыре) расположены на одной прямой, то определяемое этими пятью точками коническое сечение должно распасться на две прямых.

Если, например, A , C и E лежат на одной прямой, то коническое сечение распадается на прямые ACE и BD , и точка F описывает последнюю.

Рассмотрим еще случай, когда окажется, что точка K лежит на прямой AE , т. е. когда полюсы всех трех сторон треугольника MLF , оказываются расположенными на одной прямой. Тогда точки B и D необходимо лежат на той же прямой AEK . В этом случае точка F должна описывать прямую, и эта прямая должна проходить через пятую данную точку C (это ясно и из построения: если прямая a совпадет с AC , то точка F совпадет с C), которую можно рассматривать, как точку пересечения директрис точек M и L . Итак, если полюсы трех сторон деформирующегося треугольника расположены на одной прямой, то свободная его вершина описывает прямую, проходящую через точку пересечения директрис двух несвободных вершин этого треугольника.



Фиг. 10.

14. Полученные результаты распространяются на многоугольники с любым числом сторон.

Пусть сначала имеем четырехугольник $ABCD$ (фиг. 10) и пусть три его вершины A , B и C перемещаются соответственно по директрисам A_1B_1 , B_1C_1 и C_1D_1 , а его стороны AB , BC , CD и DA вращаются соответственно около полюсов P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Построим прямые P_1P_4 и P_2P_3 , пусть они пересекаются в точке P ; тогда прямая PB пересечет стороны AD и DC в некоторых точках X и Y . Рассмотрим треугольник ABX : его вершины A и B скользят по директрисам A_1B_1 и B_1C_1 , а его стороны вращаются: AB около P_1 , AX около P_4 и BX около P . Так как P , P_1 и P_4 лежат на одной прямой, то свободная вершина X должна описывать прямую, проходящую через точку пересечения директрис вершин A и B , т. е. через точку B_1 . Совершенно так же получим, что точка Y (свободная вершина треугольника BCY) описывает прямую, проходящую через C_1 . Эти прямые определяются, когда будет получено одно положение точек X и Y . Рассмотрим теперь треугольник XYD : две его вершины X и Y скользят по только что указанным прямым, и его стороны вращаются около

полюсов P , P_4 и P_3 . Следовательно, его свободная вершина D описывает коническое сечение, проходящее через точки P_3 и P_4 , т. е. через полюсы сторон, прилегающих к свободной его вершине D . Кроме того, оно проходит через точку пересечения прямых B_1Y и C_1Y и через точки пересечения прямых B_1X с PP_4 и прямых C_1Y с PP_3 , чем это коническое сечение вполне определяется. Итак, деформирование четырехугольника $ABCD$ можно заменить деформированием треугольника XVD , причем полюсы его сторон и директрисы его вершин X и Y получаются линейным построением, если даны полюсы всех сторон четырехугольника $ABCD$ и директрисы его вершин A , B и C , откуда следует, что свободная вершина D четырехугольника описывает коническое сечение.

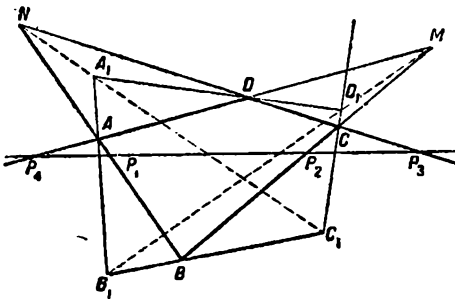
Если теперь перейдем к многоугольнику с любым числом сторон, все стороны которого вращаются около определенных полюсов, а вершины, все кроме одной, двигаются по определенным директрисам, то свободная вершина должна также описывать коническое сечение. В самом деле, пусть на фиг. 10 отрезок AD заменен какою-либо ломаною $AFGD$, причем каждая из ее сторон вращается около определенного полюса, а каждая вершина (кроме D) перемещается по определенной директрисе, — вершина D попрежнему остается свободной. Тогда такое же построение, какое было выполнено для $ABCD$, приведет нас к замене трех вершин A , B и C двумя X_1 и Y_1 : если P_5 есть полюс стороны AF , точка Q есть пересечение прямых P_2P_3 и P_1P_5 , то точка X_1 есть общая точка прямых AF и QB , а Y_1 — общая точка прямых CD и QB ; при этом точка X_1 должна двигаться по определенной прямой X_1B_1 и Y_1 — по прямой Y_1C_1 . Таким образом мы приходим к новому многоугольнику X_1Y_1FGD , имеющему одну вершину меньше, причем его свободная вершина D должна перемещаться совершенно так же, как и у многоугольника $ABCFGD$. Продолжая этот процесс, мы всегда придем в конце концов к четырехугольнику, для которого уже доказано, что его свободная вершина описывает коническое сечение.

В некоторых частных случаях свободная вершина многоугольника может описывать прямую. Мы остановимся лишь на случае, когда полюсы всех сторон P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , . . . многоугольника $ABCD$. . . лежат на одной прямой (фиг. 11), причем вершины, все кроме одной, двигаются по определенным директрисам A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , . . . Остановимся лишь на четырехугольнике. Пусть AD и BC пересекаются в точке M . Так как полюсы P_4 , P_1 и P_2 сторон треугольника MAB расположены на одной прямой, то его свободная вершина M описывает прямую MB_1 . Тогда четырехугольник $ABCD$ может быть заменен треугольником MCD , стороны которого вращаются около полюсов P_4 , P_3 и P_2 и вершины C и M двигаются по определенным директрисам. Так как полюсы P_4 , P_3 и P_2 лежат на одной прямой, то свободная вершина D описывает прямую. Эта прямая должна проходить через

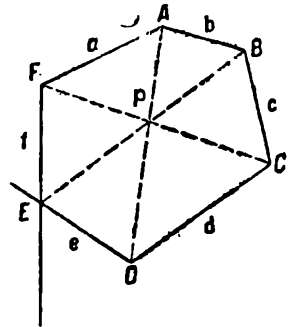
точку D_1 , где пересекаются директрисы MB_1 точки M и C_1D_1 точки C . Так же, продолжая стороны AB и CD до пересечения в точке N , найдем, что прямая, описываемая точкою D , должна проходить через точку A_1 , где пересекаются NC_1 и A_1B_1 . Следовательно, эта прямая (по которой движется D) вполне определена.

15. Совершенно так же развивается построение шестой касательной к коническому сечению, заданному пятью касательными, — это построение, как известно, опирается на теорему Брианшона.

Пусть даны прямые a, b, c, d и e (фиг. 12), которые определяют собою касающиеся их коническое сечение. Если взять их в указанном порядке, то получим четыре вершины A, B, C и D описанного около этого конического сечения простого шестисторонника. Возьмем на прямой e произвольно пятую вершину E ;



Фиг. 11.



Фиг. 12.

тогда через точку E проходят, вообще говоря, две касательных к коническому сечению, одна из которых есть e . Задача сводится к построению второй. Строим прямые AD и BE ; они определяют точку Брианшона P , соединив которую с C , найдем шестую вершину F на прямой a описанного шестисторонника; тогда прямая EF и будет искомою шестой касательной.

Если взятую произвольно на e точку E передвигать по e , то точка F будет перемещаться по прямой a и P по прямой AD , между тем как PE будет вращаться около центра B и PF около C ; тогда прямая l будет огибать наше коническое сечение. Мы можем теперь, остановив свое внимание на треугольнике PEF , установить:

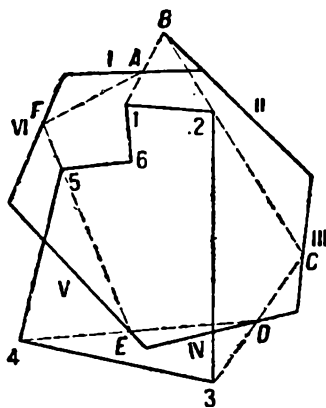
Если все три вершины треугольника движутся по определенным прямым (директрисам) и две его стороны вращаются около определенных точек (полюсов), то третья его сторона, свободная, огибает некоторое коническое сечение, касающееся тех двух директрис, которые описываются лежащими на этой стороне двумя вершинами треугольника.

Если три (или четыре) из данных касательных проходят через одну точку, то огибаемое коническое сечение распадается на две

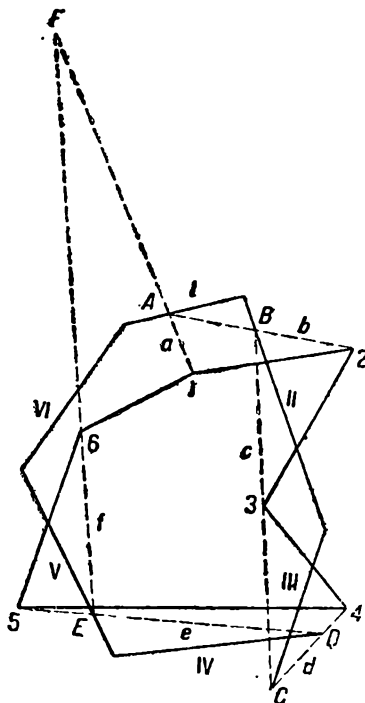
точки, одна из которых уже определена как общая точка трех данных касательных, а другая определяется пересечением двух остальных (или расположена на пятой данной касательной, когда четыре из данных прямых проходят через одну точку).

Развитие этого приводит к ряду предложений, взаимно двойственных с теми, которые даны в § 13. Приводим эти предложения:

Если все вершины какого-либо простого многоугольника перемещаются по определенным прямым (директрисам), а его стороны, все кроме одной, вращаются около определенных точек (называемых полюсами), то свободная сторона, вообще говоря, огибает некоторое коническое сечение.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

В частных случаях это огибаемое коническое сечение может распасться на две точки, и тогда свободная сторона вращается около точки.

Наиболее простым из этих частных случаев является тот, когда директрисы всех вершин многоугольника проходят через одну точку.

16. Вышеизложенное позволяет решить задачу:

Даны два простых многоугольника с одинаковым числом вершин; построить новый многоугольник так, чтобы он был вписан в один из данных и описан около другого.

Ту же задачу можно выразить в форме:

Построить многоугольник так, чтобы все его вершины расположились на данных прямых и все его стороны проходили через данные точки, причем порядок заранее определен.

Пусть стороны первого из данных многоугольников суть I, II, III, IV, V и VI (фиг. 13), а вершины второго— $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 .

Возьмем на стороне I произвольную точку A , соединим ее с вершиною 1 и определим точку B , где прямая $(A1)$ пересекается со стороною II ; затем соединим точку B с вершиною 2 и определим точку C , где прямая $(B2)$ пересекается со стороною III и т. д., пока не дойдем до последней стороны VI , на которой определим точку F . Тогда определится многоугольник $ABCDEF$, у которого лишь сторона FA не удовлетворяет (вообще говоря) требованию проходить через вершину 6 . Меняя положение точки A на прямой I , мы будем получать ряд многоугольников $ABCDEF$, у которых все вершины двигаются по директрисам I, II, \dots, VI и стороны, все кроме одной, вращаются около полюсов $1, 2, 3, 4$ и 5 . Свободная сторона FA этого многоугольника огибает некоторое коническое сечение, касающееся директрис I и VI , по которым двигаются вершины A и F , лежащие на этой свободной стороне. Взяв три различных положения точки A на прямой I , получим три касательных FA к этому коническому сечению, которые вместе с касательными I и VI вполне его определяют. Остается построить, что выполним циркулем и линейкою, те две его касательных, которые проходят через вершину 6 ; их точки пересечения со стороны I дадут те положения точки A , которые приведут к искомым многоугольникам.

Вот и другое решение этой задачи, взаимно двойственное с предыдущим:

Через вершину 1 строим произвольно прямую a (фиг. 14); где лежит на ней вершина F , мы еще не знаем. Пересечение прямой a с директрисою I дает точку A —первую вершину искомого многоугольника. Соединяя ее с вершиною 2 , получим прямую b , которая со стороною II пересекается во второй вершине B многоугольника. Соединяя B с вершиною 3 , получим прямую c и третью вершину C искомого многоугольника и т. д. Наконец, получим последнюю сторону f многоугольника, которая в пересечении с прямою a дает последнюю вершину F многоугольника $ABCDEF$.

Вращая прямую a около вершины 1 , будем получать различные многоугольники $ABCDEF$, у которых все стороны вращаются соответственно около полюсов $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 и вершины, все кроме последней F , двигаются по директрисам I, II, III, IV и V . Свободная вершина F , как выше получено, описывает коническое сечение, проходящее через полюсы прилегающих к ней сторон, т. е. через точки 1 и 6 . Чтобы определить это коническое сечение, надо получить еще три различных положения точки F , что достигается при помощи трех различных положений прямой a (обязанной проходить через вершину 1). После этого при помощи циркуля и линейки строятся, как то известно, точки пересечения этого конического сечения с прямою VI . Получим, вообще говоря, два положения F_1 и F_2 для искомой последней вершины (которая

должна оказаться лежащей на стороне VL . Соединяя каждую из точек F_1 и F_2 с вершиною I , мы получим те положения для стороны a искомого многоугольника, которые после выше данного построения и дадут два искомых многоугольника.

Если задачу формулировать так: построить многоугольник так, чтобы его вершины по порядку располагались на данных прямых и его стороны (тоже по порядку) проходили через данные точки, то здесь могут быть случаи. 1) все данные точки располагаются на одной прямой и 2) все данные прямые проходят через одну точку.

Эти два случая, как то видно из конца § 13 и конца § 14, могут быть построены при помощи только линейки.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ АКСИОМАХ РАСПОЛОЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ГИЛЬБЕРТА¹⁾

Л. П. Радзишевский (Ленинград)

Группа аксиом расположения или иначе вторая группа аксиом системы Гильберта включает в себе четыре нижеследующие аксиомы ²⁾:

II, 1. Если три точки A, B, C расположены на одной прямой и если точка C лежит между A и B , то она лежит также между B и A .

II, 2. Если точки A и B лежат на некоторой прямой, то на этой прямой всегда найдется точка C , которая лежит между A и B , и такая точка D , что B лежит между A и D .

II, 3. Если три точки A, B и C расположены на одной прямой, то из них всегда одна и только одна лежит между двумя другими.

II, 4. Пусть даны три не лежащие на одной прямой точки A, B и C и прямая a , не проходящая ни через одну из данных точек и расположенная в плоскости, определяемой этими точками. Если прямая a пересекает отрезок AC , то она пересекает еще отрезок AB , но не пересекает отрезок CB , или же пересекает отрезок CB , но не пересекает отрезок AB .

Аксиомы II, 1; II, 2; II, 3 образуют так называемую линейную подгруппу; аксиома II, 4 образует плоскостную подгруппу второй группы аксиом. На аксиому II, 4 впервые внимание геометров обратил М. Паш³⁾; поэтому ее обычно называют аксиомой Паша.

¹⁾ Изложено на лекциях по курсу „Основания геометрии“ в осеннем семестре 1934/35 учебного года для студентов-математиков 4-го курса Ленинградского педагогического института имени Покровского.

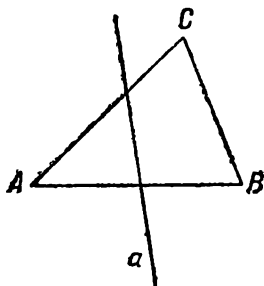
²⁾ Гильберт, Основания геометрии, перевод с 5-го немецкого издания, 1923.

³⁾ M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882, 1912.

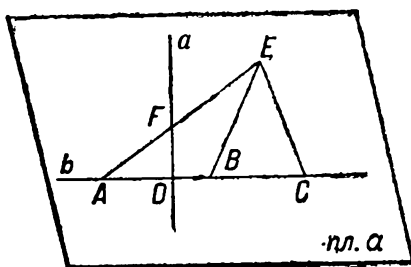
В первом издании „Оснований геометрии“¹⁾ в числе аксиом второй группы кроме вышеперечисленных имела еще одна аксиома.

Если на прямой даны четыре точки, то их можно обозначить буквами A, B, C и D таким образом, что B будет лежать как между A и C , так и между A и D , а C будет лежать как между A и D , так и между B и D . Кроме указанной существует обратная нумерация.

Вскоре после выхода в свет „Оснований геометрии“ известный американский математик Мур доказал²⁾ аксиому о нумерации четырех точек, пользуясь аксиомами II, 1; ...; II, 4 и аксиомами первой группы. Поэтому в последующих изданиях „Оснований геометрии“ Гильберт исключил предложение о нумерации четырех точек из числа аксиом.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Доказательство Мура воспроизведено без существенных изменений Хольстедом в его курсе „Рациональной геометрии“³⁾. Следует отметить, что доказательство Мура не отличается простотой; оно опирается на ряд предварительно доказываемых лемм, причем доказательство этих лемм, имеющих явно выраженный линейный характер, основывается на плоскостной аксиоме Паша.

Мы покажем, что предложение о нумерации точек можно доказать значительно проще. Для доказательства нам будет необходима только одна простая лемма.

Лемма. Пусть на прямой b даны три точки A, B и C . Если четвертая точка D лежит между точками A и C , то она лежит еще между точками A и B , но не лежит между C и B или же точка D лежит между C и B , но не лежит между A и B .

Для доказательства выполним нижеследующие построения (законность последних непосредственно вытекает из аксиом первой и второй групп):

¹⁾ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1899.

²⁾ E. H. Moore, Transactions of the American Mathematical Society, 1902.

³⁾ Halsted, Rational geometry, New York, 1907.

См. также примечание к русскому изданию Гильберта.

Вообразим плоскость α , проходящую через прямую b ; в плоскости α возьмем не лежащую на прямой b точку E ; последнюю соединим с точками A , B и C ; берем на прямой AE точку F между A и E и соединяем точки F и D (фиг. 2).

Применяя аксиому Паша к треугольникам AEC , ECB и AEB , мы видим, что лемма доказана.

Переходя к доказательству предложения о нумерации четырех точек, условимся обозначать для краткости понятие „между“ знаком \subset , так что если, например, B лежит между A и C , то мы напишем $B \subset AC$ (заметим, что \subset есть знак общепотребительный в теории множеств, он обозначает, что некоторый элемент принадлежит некоторому множеству; в данном случае мы имеем дело с множеством точек, расположенных между концами отрезка). Если, напротив, точка не лежит между двумя другими, то мы это будем обозначать тем же, но перечеркнутым знаком. Например, пишем $A \not\subset BC$.

Пусть даны четыре точки, лежащие на одной прямой; требуется доказать, что их можно обозначить буквами A , B , C и D таким образом, что будем иметь:

$$B \subset AC, B \subset AD, C \subset AD, C \subset BD. \quad (*)$$

Возьмем наугад любую точку; если она не лежит ни на одном из трех отрезков, определяемых остальными тремя точками, то мы ее обозначим через A ; из оставшихся трех точек только одна может лежать между двумя другими, ее мы и обозначим через C . После этого берем наугад любую из оставшихся двух точек; если взятая точка лежит между A и C , то мы ее обозначим через B , другую же обозначаем D ; но если взятая точка не лежит между A и C , то обозначаем ее D , оставшуюся четвертую обозначаем B .

Может, однако, случиться, что взятая наугад при первоначальном выборе точка лежит на одном из трех отрезков, определяемых тремя оставшимися точками, обозначим ее тогда B . Согласно нашей лемме точка B лежит еще на другом из вышеупомянутых трех отрезков, но не лежит на третьем. Фиксируем наше внимание на точке B и на концах того единственного отрезка, на котором точка B не лежит. Из трех рассматриваемых точек только одна лежит между двумя другими. Но это, очевидно, будет во всяком случае не точка B , а один из концов нашего отрезка, его мы обозначим через C , другой конец через D . Наконец, оставшуюся четвертую точку обозначим A .

Таким образом мы имеем только три случая:

1. $A \not\subset BC, A \not\subset BD, A \not\subset CD, C \subset BD, B \subset AC$
2. $A \not\subset BC, A \not\subset BD, A \not\subset CD, C \subset BD, D \not\subset AC$
3. $B \not\subset CD, C \subset BD, B \subset AC, B \subset AD,$

Теперь мы должны доказать, что все соотношения (*) имеют место, если выполняется один из комплексов условий 1, 2 или 3.

Для доказательства воспользуемся схемой, изображенной на фиг. 3.

На фиг. 3 строки соответствуют точкам, столбцы отрезкам; ненужные квадраты отмечены штриховкой.

Рассмотрим первый случай и внесем в схему соответствующие ему условия. Принимая во внимание нашу лемму и аксиому II, 3, мы можем утверждать, что в каждой тройке квадратов, расположенных на одной горизонтали, может оказаться или два \subset и одно $\not\subset$ или ни одного \subset и три $\not\subset$; напротив, в квадратах, отмеченных одной и той же римской цифрой, всегда будет одно \subset и два $\not\subset$.

Заполняя пустые квадраты, получим фиг. 4.

	AB	AC	AD	BC	BD	CD
A				I $\not\subset$	II $\not\subset$	III $\not\subset$
B		I \subset	II			IV
C	I		III		IV \subset	
D	II	III		IV		

Фиг. 3.

	AB	AC	AD	BC	BD	CD
A				I $\not\subset$	II $\not\subset$	III $\not\subset$
B		I \subset	II \subset			IV $\not\subset$
C	I $\not\subset$		III \subset		IV \subset	
D	II $\not\subset$	III $\not\subset$		IV $\not\subset$		

Фиг. 4.

Аналогично трактуем случаи 2 и 3, причем в конечном итоге каждый раз получается фиг. 4. Рассматривая последнюю, мы видим, что теорема доказана. Если мы взаимно переменим обозначения точек A, D и B, C, то получим обратную нумерацию точек, в чем легко убедиться, пользуясь нашей схемой. Подобного рода схемы весьма облегчают доказательства многих других теорем, относящихся к расположению точек на прямой.

Если мы будем считать, что предложение о нумерации четырех точек нам известно, то, основываясь на нем, можно обратно доказать нашу лемму, не обращаясь к плоскостным соотношениям. Таким образом предложение о нумерации четырех точек и наша лемма друг другу равносильны. Следует заметить, что, имея аксиомы II, 1; ...; II, 3 и лемму или равносильное ей предложение о нумерации четырех точек, можно доказать любую теорему, касающуюся расположения точек на прямой, не обращаясь к плоскости. После этого возникает вопрос: нельзя ли доказать нашу лемму, не пользуясь плоскостью? Мы покажем, что это невозможно.

Построим такую одномерную геометрию. Назовем точкой любое вещественное число; совокупность всех вещественных чисел назовем прямой. Пусть даны три точки a , b и c ; мы будем говорить, что точка c лежит между a и b , если одновременно

$$c < a \text{ и } c < b;$$

в противном случае мы будем говорить, что точка c не лежит между a и b . Легко видеть, что в рассматриваемой геометрии аксиомы II, 1; ...; II, 3 выполняются; напротив, наша лемма, вообще говоря, несправедлива. Действительно, если мы возьмем числа:

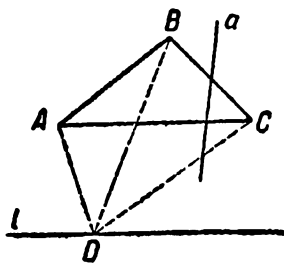
$$d < a < b < c,$$

то точка d будет одновременно лежать внутри каждого из трех отрезков, определяемых точками a , b и c .

Что, однако, представляет собой наша лемма? Мы видели, что лемма легко доказывается на основании аксиомы Паша. Более того, нетрудно видеть, что аксиома Паша превращается в лемму, коль скоро все вершины треугольника оказываются на одной прямой. Мы можем поэтому нашу лемму называть линейной аксиомой Паша. Таким образом линейную аксиому Паша можно доказать, пользуясь плоскостной аксиомой Паша, но если мы не пожелаем обращаться к плоскости, то она не может быть доказана на основании одних аксиом II, 1; ...; II, 3. Поэтому, если мы пожелаем иметь полный список аксиом расположения для геометрии одного измерения, то мы должны присоединить к аксиоме II, 1; ...; II, 3 линейную аксиому Паша. В редакционном отношении весьма удобно объединить линейную аксиому Паша с плоскостной, опустив в формулировке последнее слово „не лежащие на одной прямой“, после чего аксиома II, 4 примет вид:

Пусть даны три точки A , B , C и прямая a в плоскости ABC , не проходящая ... и т. д.

Если, наоборот, мы будем придерживаться правила—вкладывать в каждую аксиому минимум содержания, то вышеуказанное расширение аксиомы Паша не будет уместно. Однако в таком случае, чтобы быть последовательным, нужно попытаться еще ограничить аксиому Паша. Мы можем, например, постулировать аксиому Паша не для всех треугольников в данной плоскости, а только для таких, у которых одна из вершин находится на любой заранее фиксированной пр. мой.



Фиг. 5.

Действительно, условимся, что аксиома Паша верна для любого треугольника, имеющего по крайней мере одну свою вершину на прямой l (фиг. 5). Тогда можно утверждать, что аксиома Паша имеет место для какого угодно треугольника в данной плоскости. Пусть имеется тре-

угольник ABC , у которого ни одна из его вершин не лежит на прямой l . Пусть дана еще прямая a , пересекающая отрезок AC . Требуется доказать, что прямая a пересекает еще сторону AB , но не пересекает BC или же пересекает BC , но не пересекает AB .

Соединим любую точку D прямой l с точками A , B и C . Рассматривая треугольники DAC , DAB , DBC , мы видим, что теорема доказана.

Все вышеизложенное мы можем резюмировать следующим образом:

а) Гильберт был в известном смысле прав, поместив в числе аксиом второй группы предложение о нумерации четырех точек.

б) Изъятие аксиомы о нумерации четырех точек нарушает полноту списка линейных аксиом расположения и с этой точки зрения не может быть рассматриваемо как прогресс.

с) Полнота списка линейных аксиом расположения легко может быть восстановлена при помощи объединения плоскостной аксиомы Паша с линейной.

д) Если, однако, желательно иметь аксиомы, заключающие в себе минимум содержания, то следует, напротив, еще ограничить аксиому Паша.

О ВЫВОДЕ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ МЕРЫ КРИВИЗНЫ (ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ) И МЕРЫ КРУЧЕНИЯ

Д. М. Синцов (Харьков)

§ 1. КРИВИЗНА

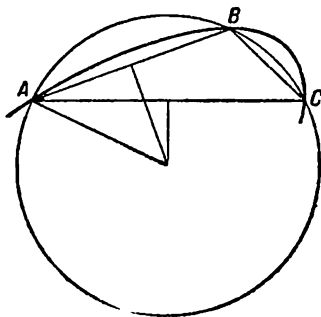
Обычный вывод формулы для радиуса (и меры) кривизны плоской кривой и первой кривизны пространственной кривой проводится различно для той и другой. Между тем, в обоих случаях мы исходим из круга, проходящего через три точки кривой, и можно поэтому в обоих случаях воспользоваться известной формулой для радиуса круга, описанного около треугольника, образуемого точками A , B , C (фиг. 1).

$$\frac{1}{2R} = \frac{2 \cdot \triangle ABC}{AC \cdot BC \cdot AB}. \quad (1)$$

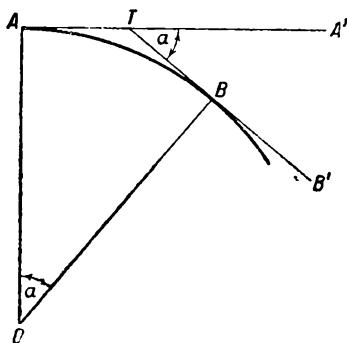
Определяя кривизну, как отношение угла смежности к расстоянию между точками прикосновения, для плоской кривой заменяем угол смежности $A'TB'$ (фиг. 2) углом ADB между нормальными, проведенными в начале и конце дуги AB , и расстояние считаем по дуге AB . Для круга $\cup AB = a \cdot r$ и, следовательно, $\frac{a}{\cup AB} = \frac{1}{r}$.

Таким образом мы естественно приходим к определению радиуса кривизны как радиуса круга, проведенного через три точки кривой, когда в пределе они совпадают.

Но поскольку через три точки всегда можно провести окружность, хотя бы кривая сама по себе и не была плоской, то,



Фиг. 1.



Фиг. 2.

приняв такое определение кривизны, нам останется только проводить счет в том или другом предположении.

1. Случай плоской кривой

Пусть кривая задана уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (2)$$

и точки A, B, C соответствуют значениям параметра t, t_1, t_2 ; их координаты соответственно $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Тогда

$$2 \cdot \Delta ABC = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix},$$

или заменяя

$$x_1 - x = (t_1 - t)x' + \frac{1}{1 \cdot 2}(t_1 - t)^2 x'' + \dots$$

$$y_1 - y = (t_1 - t)y' + \frac{1}{1 \cdot 2}(t_1 - t)^2 y'' + \dots$$

$$x_2 - x = (t_2 - t)x' + \frac{1}{1 \cdot 2}(t_2 - t)^2 x'' + \dots$$

$$y_2 - y = (t_2 - t)y' + \frac{1}{1 \cdot 2}(t_2 - t)^2 y'' + \dots$$

имеем:

$$2 \cdot \Delta ABC = (t_1 - t)(t_2 - t) \cdot \begin{vmatrix} x' + \frac{t_1 - t}{2}x'' + \dots & y' + \frac{t_1 - t}{2}y'' + \dots \\ x' + \frac{t_2 - t}{2}x'' + \dots & y' + \frac{t_2 - t}{2}y'' + \dots \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из второй и вынося $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ из-под знака определителя, найдем:

$$2. \Delta ABC = \frac{1}{2} (t_1 - t) (t_2 - t) (t_2 - t_1) \times \\ \times \begin{vmatrix} x' + \frac{t_1 - t}{2} x'' + \dots, & y' + \frac{t_1 - t}{2} y'' + \dots \\ x'' + \frac{t_2 - t_1}{2} x''' + \dots, & y'' + \frac{t_2 - t_1}{2} y''' + \dots \end{vmatrix}$$

Но

$$AB = (t_1 - t) \sqrt{x'^2 + y'^2 + (t_1 - t) S},$$

$$AC = (t_2 - t) \sqrt{x'^2 + y'^2 + (t_2 - t) S_1},$$

$$BC = (t_2 - t_1) \sqrt{x'^2 + y'^2 + (t_2 - t_1) S_2}.$$

Подставляя эти значения в формулу (1) и переходя к пределу при $B \rightarrow A$, $C \rightarrow A$ [и, следовательно, $(t_1 - t) \rightarrow 0$, $(t_2 - t) \rightarrow 0$], получим известную формулу:

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Пространственная кривая

Пусть кривая задана уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (3)$$

и точки A, B, C соответствуют значениям параметра t, t_1, t_2 .

Здесь

$$2 \cdot \Delta ABC = \sqrt{(2 \Delta_{ys})^2 + (2 \Delta_{sx})^2 + (2 \Delta_{xy})^2},$$

где Δ_{ys} , Δ_{sx} , Δ_{xy} — проекции треугольника ABC на соответствующие плоскости координат. Поэтому

$$2 \cdot \Delta ABC = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y, & z_1 - z \\ y_2 - y, & z_2 - z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z, & x_1 - x \\ z_2 - z, & x_2 - x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x, & y_1 - y \\ x_2 - x, & y_2 - y \end{vmatrix}^2},$$

и потому

$$2 \cdot \Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot (t_1 - t) (t_2 - t) (t_2 - t_1) \times$$

$$\times \sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 + S},$$

где S стремится к нулю вместе с $(t_1 - t) \rightarrow 0$, $(t_2 - t) \rightarrow 0$.

Длины сторон выражаются соответственно, как и в первом случае:

$$AB = (t_1 - t) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 + \varepsilon_1},$$

$$AC = (t_2 - t) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 + \varepsilon_1},$$

$$BC = (t_2 - t_1) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 + \varepsilon_1}.$$

Взяв отношение $\frac{4 \cdot \triangle ABC}{AB \cdot AC \cdot BC}$ и перейдя к пределу при $t_1 \rightarrow t$ и $t_2 \rightarrow t$, получим:

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Можно идти далее и находить таким же образом выражение для радиуса (первой) кривизны кривого M_1 в евклидовом пространстве n измерений,—как это было мною проделано в статье „К вопросу о кривизне кривых линий“ („Известия Казанского ФМО“, стр. 2, т. XII, кн. 1, 1903). В ней только нужно внести ту поправку, что множитель пропорциональности, который, мне казалось, нужно ввести для сохранения единообразия формул, для первой кривизны равен 1, а не 2, т. е. это определение в точности совпадает с обычным.

§ 2. КРУЧЕНИЕ (ВТОРАЯ КРИВИЗНА)

Тот же метод применим с тем же успехом и к выводу выражения второй кривизны, хотя при отсутствии соответствующего образа, подобного кругу кривизны, дело обстоит с геометрической стороны не столь наглядно ¹⁾. Пусть дана снова кривая, заданная уравнениями (3).

Пусть ABC —одна плоскость, проходящая через три бесконечно близкие точки кривой A, B, C (фиг. 3), BCD —другая плоскость, проходящая через бесконечно близкие точки B, C, D той же кривой.

Изменение положения плоскости BCD сравнительно с ABC характеризуется двугранным углом η между этими двумя плоскостями,—соответственно переходу от точки кривой A к точке B . Отношение η к AB в пределе дает то, что мы называем *кручением*. Мы взяли, однако, на кривой четыре точки A, B, C, D и для симметрии будем рассматривать отношение $\frac{\eta}{AD}$, введя в знаменатель вместо первого ребра тетраэдра $ABCD$ его ребро AD . Поскольку отношение $\frac{AB}{AD}$ произвольно, чтобы наше определение

¹⁾ Очень изящный аналитический вывод, обходящийся без пользования формулами Френе-Серра, дал проф. Б. Я. Букрѣв в IV томе «Записок Киевского института народного образования».

совпало с обычным, может понадобиться множитель m , так что кручение

$$T = m \cdot \lim_{D \rightarrow A} \frac{\eta}{AD}.$$

Но при этом и $\eta \rightarrow 0$, а потому

$$\lim \frac{\eta}{AD} = \lim \frac{\sin \eta}{AD} \cdot \lim \frac{\eta}{\sin \eta},$$

причем второй множитель правой части имеет пределом 1.

Таким образом кручение

$$T = m \cdot \lim_{D \rightarrow A} \frac{\sin \eta}{AD}.$$

Вообразим теперь проходящую через A плоскость, перпендикулярную к BC , и в ней опустим из A перпендикуляры Ah на прямую BC и AH на плоскость BCD .

Треугольник AHh , прямоугольный при H , дает:

$\angle AhH = \eta$ и $AH = Ah \cdot \sin \eta$.

Тогда AH —высота пирамиды (тетраэдра) $ABCD$, если за основание принять BCD , а за вершину A ; обозначим ее H . Ah —высота треугольника ABC , если основанием считать BC ; обозначим ее h .

Таким образом

$$BC \cdot h = 2 \cdot \triangle ABC,$$

откуда

$$h = \frac{2 \cdot \triangle ABC}{BC},$$

и

$$\sin \eta = \frac{H}{h} = \frac{H \cdot BC}{2 \cdot \triangle ABC}.$$

С другой стороны, объем тетраэдра $ABCD$:

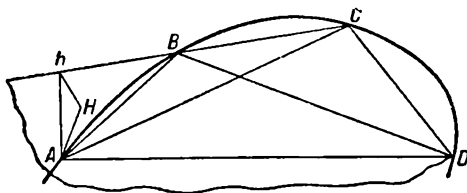
$$V(ABCD) = \frac{1}{3} H \cdot \triangle BCD,$$

откуда

$$H = \frac{6 \cdot V(ABCD)}{2 \cdot \triangle BCD},$$

и таким образом

$$\frac{\sin \eta}{AD} = \frac{6 \cdot V(ABCD)}{2 \cdot \triangle BCD \cdot 2 \cdot \triangle ABC} \cdot \frac{BC}{AD}.$$



Фиг. 3.

Чтобы найти кручение, надо искать предел правой части. Пусть координаты и значения параметра вершин тетраэдра соответственно суть:

для A : x, y, z, t ,

„ B : $x_1, y_1, z_1, t_1 = t + \tau$,

„ C : $x_2, y_2, z_2, t_2 = t + \tau_1$,

„ D : $x_3, y_3, z_3, t_3 = t + \tau_2$.

Тогда

$$6 \cdot V(ABCD) = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix},$$

где

$$x_1 - x = \tau \left[x' + \frac{\tau}{2} x'' + \frac{\tau^2}{6} x''' + \dots \right],$$

$$x_2 - x = \tau_1 \left[x' + \frac{\tau_1}{2} x'' + \frac{\tau_1^2}{6} x''' + \dots \right],$$

$$x_3 - x = \tau_2 \left[x' + \frac{\tau_2}{2} x'' + \frac{\tau_2^2}{6} x''' + \dots \right]$$

и аналогично для элементов двух других столбцов.

Подставляя в определитель и вынося за скобки множитель $\tau\tau_1\tau_2$, получим:

$$6 \cdot V(ABCD) = \tau\tau_1\tau_2 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x' + \frac{\tau}{2} x'' + \frac{\tau^2}{6} x''' + \dots & y' + \frac{\tau}{2} y'' + \frac{\tau^2}{6} y''' + \dots & z' + \frac{\tau}{2} z'' + \frac{\tau^2}{6} z''' + \dots \\ x' + \frac{\tau_1}{2} x'' + \frac{\tau_1^2}{6} x''' + \dots & y' + \frac{\tau_1}{2} y'' + \frac{\tau_1^2}{6} y''' + \dots & z' + \frac{\tau_1}{2} z'' + \frac{\tau_1^2}{6} z''' + \dots \\ x' + \frac{\tau_2}{2} x'' + \frac{\tau_2^2}{6} x''' + \dots & y' + \frac{\tau_2}{2} y'' + \frac{\tau_2^2}{6} y''' + \dots & z' + \frac{\tau_2}{2} z'' + \frac{\tau_2^2}{6} z''' + \dots \end{vmatrix}$$

вычитая первую строчку из второй и третьей, можем вынести за скобку $\frac{1}{4}(\tau_1 - \tau)(\tau_2 - \tau)$, ибо разности $\tau_1^k - \tau^k$ и $\tau_2^k - \tau^k$ делятся соответственно на $\tau_1 - \tau$ и $\tau_2 - \tau$.

Останется:

$$6 \cdot V(ABCD) = \frac{1}{4} \tau \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau) (\tau_2 - \tau) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x' + \frac{\tau}{2} x'' + \dots, & y' + \frac{\tau}{2} y'' + \dots, & z' + \frac{\tau}{2} z'' + \dots \\ x'' + \frac{\tau_1 + \tau}{3} x''' + \dots, & y'' + \frac{\tau_1 + \tau}{3} y''' + \dots, & z'' + \frac{\tau_1 + \tau}{3} z''' + \dots \\ x''' + \frac{\tau_2 + \tau}{3} x^{IV} + \dots, & y''' + \frac{\tau_2 + \tau}{3} y^{IV} + \dots, & z''' + \frac{\tau_2 + \tau}{3} z^{IV} + \dots \end{vmatrix}.$$

Вычитаем теперь еще раз вторую строку из третьей и выносим за знак определителя общий множитель $\frac{1}{3} (\tau_2 - \tau_1)$; формула примет вид:

$$6 \cdot V(ABCD) = \frac{1}{12} \tau \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau) (\tau_2 - \tau) (\tau_2 - \tau_1) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x' + \frac{\tau}{2} x'' + \dots, & y' + \frac{\tau}{2} y'' + \dots, & z' + \frac{\tau}{2} z'' + \dots \\ x'' + \frac{\tau_1 + \tau}{3} x''' + \dots, & y'' + \frac{\tau_1 + \tau}{3} y''' + \dots, & z'' + \frac{\tau_1 + \tau}{3} z''' + \dots \\ x''' + \frac{\tau_1 + \tau_1 + \tau}{4} x_{IV} + \dots, & y''' + \frac{\tau_2 + \tau_1 + \tau}{4} y_{IV} + \dots, & z''' + \frac{\tau_2 + \tau^2 + \tau}{4} z_{IV} + \dots \end{vmatrix}$$

Таким образом главная часть $6 \cdot V(ABCD)$ есть

$$\frac{1}{12} \tau \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau) (\tau_2 - \tau) (\tau_2 - \tau_1) \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}.$$

Но, как мы уже видели выше (§ 1, пункт 2):

$$\text{гл. ч. } 2 \cdot \triangle BCD = \frac{1}{2} (\tau_1 - \tau) (\tau_2 - \tau) (\tau_2 - \tau_1) \cdot \sqrt{\sum (x' y'' - y' x'')^2}$$

$$\text{гл. ч. } 2 \cdot \triangle ABC = \frac{1}{2} \tau \tau_1 (\tau_1 - \tau) \cdot \sqrt{\sum (x' y''' - y' x''')^2}.$$

Далее

$$\text{гл. ч. } BC = (t_1 - t) \cdot \sqrt{\sum x'^2},$$

$$\text{гл. ч. } AD = \tau_2 \cdot \sqrt{\sum x'^2}.$$

Подставляя в формулу (6), получаем:

$$\text{гл. ч. } \frac{6 \cdot V}{2 \cdot \triangle ABC \cdot 2 \cdot \triangle BCD} = \frac{1}{3} \frac{(x'y''z''')}{\sum (x'y'' - y'x'')^2} \cdot \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau},$$

но

$$\text{гл. ч. } \frac{BC}{AD} = \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_2},$$

итак

$$\lim_{A \rightarrow D} \frac{\eta}{AD} = \frac{1}{3} \frac{(x'y''z''')}{\sum (x'y'' - y'x'')^2}.$$

Отбрасывая несущественный численный множитель, приходим к обычной формуле.

Подстановку можно было бы вести несколько иначе.

По предыдущему

$$2 \cdot \triangle ABC = \frac{AC \cdot AB \cdot BC}{2 \cdot R_{ABC}}.$$

Точно так же

$$2 \cdot \triangle BCD = \frac{AC \cdot CD \cdot BD}{2 \cdot R_{BCD}}.$$

Таким образом из (6) получим:

$$\frac{\sin \eta}{BD} = \frac{6 \cdot V(ABCD) \cdot 2 \cdot R_{ABC} \cdot 2R_{BCD}}{AC \cdot BC \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot BD} \cdot \frac{BC}{BD},$$

или

$$\frac{\sin \eta}{BD} = 4R_{ABC}R_{BCD} \cdot \frac{6 \cdot V(ABCD)}{AB \cdot AC \cdot BC \cdot BD \cdot CD \cdot AD}.$$

В пределе первый множитель дает $4R^2$, второй множитель имеет главной частью знаменателя

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3 \tau_1 \tau_2 \tau (\tau_1 - \tau) (\tau_2 - \tau) (\tau_2 - \tau),$$

и, таким образом,

$$T = \frac{1}{e} = \frac{R^2 (x'y''z''')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3},$$

если снова отбросить численный множитель $\frac{1}{3}$, т. е. принять $m = 3$.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ГАММА-ФУНКЦИИ

Б. С. Корсаков (Москва)

Гамма-функция — простейшая из так называемых специальных функций, обозначаемая $\Gamma(x)$ и обычно определяемая¹⁾ равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0).$$

В силу своих свойств гамма-функция является весьма удобным аналитическим инструментом, употребляемым в различных областях математики, причем характер ее свойств дал основание Е. Артину (E. Artin) в его книге „Einführung in die Theorie der Gammafunction“ отметить, что „гамма-функцию можно во всех отношениях причислить к элементарным функциям и что для всех ее свойств можно дать элементарные и ясные доказательства“²⁾.

В число свойств гамма-функции входит следующая теорема умножения, найденная Гауссом (Gauss)³⁾:

$$\Gamma(px) = p^{px-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} \prod_{r=0}^{p-1} \Gamma\left(x + \frac{r}{p}\right). \quad (1)$$

Шоблох (Schobloch) получил обобщенную теорему умножения гамма-функции:

$$\frac{\prod_{s=0}^{p-q-1} \Gamma\left(px + \frac{ps}{q}\right)}{\prod_{r=0}^{p-1} \Gamma\left(qx + \frac{qr}{p}\right)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{pqx + \frac{pq-p-q}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{q-p}{2}}, \quad (2)$$

¹⁾ Уиттекер и Ватсон (Whittaker and Watson „A course of modern analysis“) отмечают, что для изложения теории гамма-функций удобнее определять ее посредством бесконечного произведения в канонической форме Вейерштрасса:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{n}}}{1 + \frac{z}{n}}, \quad \text{где } C = 0,57721\dots, \text{ так наз. эйлерова постоянная.}$$

За последние годы вышел из печати ряд книг на русском языке, в которых излагается теория гамма-функции: 1) Е. Артин, Введение в теорию гамма-функции, 1934; 2) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, 1933; 3) Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. II, 1934; 4) Ш. Ж. де-ла-Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, 1933 и т. д. Из книг на иностранных языках следует упомянуть капитальный труд Н. Нильсена (N. Nielsen), Handbuch der Theorie der Gammafunction, 1906, содержащий подробную библиографию.

²⁾ Цитировано по русскому переводу Райкова (Москва, ГТТИ, 1934).

³⁾ p и q здесь и далее означают целые положительные числа ≥ 1 .

частным случаем которой, при $q = 1$, как легко видеть, является теорема Гаусса (1).

Доказательство приведенной теоремы (2), включенное датским математиком Нильсеном (N. Nielsen) в его „Handbuch der Theorie der Gammafunction“, имея исходной точкой формулу Плана (Plan):

$$\ln \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left((x-1)e^{-t} + \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt,$$

представляет интерес своей независимостью от теоремы Гаусса (1), но является довольно сложным. Между тем, исходя из теоремы (1), обобщенная теорема Шоблоха может быть доказана весьма просто.

В самом деле, представим теорему (1) в таком виде:

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{px - \frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(px) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma\left(x + \frac{r}{p}\right).$$

Заменяя здесь z последовательно через x , $x + \frac{1}{q}$, $x + \frac{2}{q}$, ..., $x + \frac{q-1}{q}$, получим следующий ряд равенств:

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{px - \frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(px) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma\left(x + \frac{r}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{p\left(x + \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(px + \frac{p}{q}\right) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma\left(x + \frac{1}{q} + \frac{r}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{p\left(x + \frac{2}{q}\right) - \frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(px + \frac{p \cdot 2}{q}\right) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma\left(x + \frac{2}{q} + \frac{r}{p}\right),$$

.....

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p}\right)^{p\left(x + \frac{q-1}{q}\right) - \frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(px + \frac{p(q-1)}{q}\right) &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma\left(x + \frac{q-1}{q} + \frac{r}{p}\right). \end{aligned}$$

Почленно, перемножив эти q равенств, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p}\right) \sum_{s=0}^{s=q-1} \left[p \left(x + \frac{s}{q} \right) - \frac{1}{2} \right] & (2\pi)^{-\frac{q}{2}} \prod_{s=0}^{s=q-1} \Gamma \left(px + \frac{ps}{q} \right) = \\ & = (2\pi)^{-\frac{pq}{2}} \prod_{s=0}^{s=q-1} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma \left(x + \frac{r}{p} + \frac{s}{q} \right). \end{aligned}$$

Учитывая же, что

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{s=q-1} \left[p \left(x + \frac{s}{q} \right) - \frac{1}{2} \right] & = px - \frac{1}{2} + p \left(x + \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{2} + p \left(x + \frac{2}{q} \right) - \\ & - \frac{1}{2} + \dots + p \left(x + \frac{q-1}{q} \right) - \frac{1}{2} = pqx + p \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q} + \dots + \frac{q-1}{q} \right) - \frac{q}{2} = \\ & = pqx + p \left(\frac{1}{q} + \frac{q-1}{q} \right) \cdot \frac{q-1}{2} - \frac{q}{2} = pqx + \frac{pq-p-q}{2}, \end{aligned}$$

мы можем предыдущее равенство переписать так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p}\right)^{pqx + \frac{pq-p-q}{2}} (2\pi)^{-\frac{q}{2}} \prod_{s=0}^{s=q-1} \Gamma \left(px + \frac{ps}{q} \right) & = \\ & = (2\pi)^{-\frac{pq}{2}} \prod_{s=0}^{s=q-1} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma \left(x + \frac{r}{p} + \frac{s}{q} \right). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства, как нетрудно заметить, инвариантна относительно перестановки p и q , следовательно, и левая часть должна обладать этими свойствами, т. е.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p}\right)^{pqx + \frac{pq-p-q}{2}} (2\pi)^{-\frac{q}{2}} \prod_{s=0}^{s=q-1} \Gamma \left(px + \frac{ps}{q} \right) & = \\ & = \left(\frac{1}{q}\right)^{pqx + \frac{pq-p-q}{2}} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma \left(qx + \frac{qr}{p} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\prod_{s=0}^{s=q-1} \Gamma \left(px + \frac{ps}{q} \right)}{\prod_{r=0}^{r=p-1} \Gamma \left(qx + \frac{qr}{p} \right)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{pqx + \frac{pq-p-q}{2}} (2\pi)^{\frac{q-p}{2}}.$$

Теорема Шоблоха доказана. Тот факт, что к доказательству были привлечены лишь вполне элементарные средства, может служить новым подтверждением правильности цитированного замечания Артина о возможности элементарного доказательства свойств гамма-функции.

Необходимо отметить своего рода универсальность метода, примененного выше к доказательству теоремы Шоблоха. Пользуясь этим методом, легко получить помимо обобщенной теоремы умножения гамма-функции аналогичные теоремы еще для многих других функций.

Это замечание относится, например, к функции синуса. Действительно, представив элементарную формулу

$$\sin pz = 2^{p-1} \sin z \cdot \sin\left(z + \frac{\pi}{p}\right) \cdot \sin\left(z + \frac{2\pi}{p}\right) \dots \sin\left(z + \frac{(p-1)\pi}{p}\right)$$

в таком виде:

$$2 \sin pz = 2^p \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(z + \frac{r\pi}{p}\right),$$

и заменив здесь z последовательно через x , $x + \frac{\pi}{q}$, $x + \frac{2\pi}{q}$, ..., $x + \frac{(q-1)\pi}{q}$, получим следующий ряд равенств:

$$2 \sin px = 2^p \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(x + \frac{r\pi}{p}\right),$$

$$2 \sin\left(px + \frac{p\pi}{q}\right) = 2^p \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{q} + \frac{r\pi}{p}\right),$$

$$2 \sin\left(px + \frac{p2\pi}{q}\right) = 2^p \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(x + \frac{2\pi}{q} + \frac{r\pi}{p}\right),$$

.....

$$2 \sin\left(px + \frac{p(q-1)\pi}{q}\right) = 2^p \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(x + \frac{(q-1)\pi}{q} + \frac{r\pi}{p}\right).$$

Почленно перемножив эти q равенства, получим:

$$2^q \prod_{s=0}^{q-1} \sin\left(px + \frac{ps\pi}{q}\right) = 2^{pq} \prod_{s=0}^{q-1} \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(x + \frac{s\pi}{q} + \frac{r\pi}{p}\right).$$

Правая часть последнего равенства, как нетрудно заметить, инвариантна относительно перестановки p и q , следовательно, и левая часть должна обладать этим свойством, т. е.

$$2^q \prod_{s=0}^{q-1} \sin\left(px + \frac{ps\pi}{q}\right) = 2^p \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(qx + \frac{qr\pi}{p}\right),$$

откуда, деля обе части равенства на 2^q , получим обобщенную теорему умножения синуса:

$$\prod_{s=0}^{q-1} \sin\left(px + \frac{ps\pi}{q}\right) = 2^{p-q} \prod_{r=0}^{p-1} \sin\left(qx + \frac{qr\pi}{p}\right).$$

Таким же приемом доказываются аналогичные свойства так называемых бернуллиевых полиномов.

НАХОЖДЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ ЧИСЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ

А. Я. Литвиненко (Сталино)

Пусть дана функция

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n. \quad (1)$$

Полагая $x = z + h$, имеем:

$$f(z + h) = z^n + b_1z^{n-1} + b_2z^{n-2} + \dots + b_{n-2}z^2 + b_{n-1}z + b_n. \quad (2)$$

Вычислим значение коэффициента b_n ; для этого положим $z = 0$.
Получаем:

$$b_n = f(h). \quad (3)$$

Остальных коэффициентов не вычисляем.

II

Пусть требуется найти рациональные корни численного уравнения

$$Ay^n + By^{n-1} + Cy^{n-2} + \dots + Ky^2 + Ly + M = 0,$$

где A, B, C, \dots, K, L, M — рациональные (целые или дробные) коэффициенты. Умножая обе части уравнения на наименьшее кратное знаменателей коэффициентов, получаем уравнение с целыми коэффициентами, вида:

$$ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + \dots + ky^2 + ly + m = 0.$$

Умножив обе части этого уравнения на a^{n-1} и выполнив подстановку $ay = x$, получим:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (4)$$

Подстановка $x = z + h$, где h — целое число, приводит его к виду:

$$z^n + b_1z^{n-1} + b_2z^{n-2} + \dots + b_{n-2}z^2 + b_{n-1}z + b_n = 0. \quad (5)$$

По ранее доказанному $b_n = f(h)$.

Так как абсолютное значение свободного члена уравнения (5) равно абсолютному значению произведения корней уравнения, то рациональные значения z находятся среди всех возможных делителей свободного члена $b_n = f(h)$. Обозначим буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ все делители числа b_n . Тогда рациональные корни уравнения (5) находятся среди чисел:

$$\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma.$$

Поскольку $x = z + h$, то рациональные значения отыскиваются среди чисел:

$$h \pm \alpha, \quad h \pm \beta; \quad h \pm \gamma. \quad (6)$$

С другой стороны, значения x лежат среди чисел:

$$\pm A, \pm B, \pm C, \dots, \quad (7)$$

где A, B, C, \dots есть всевозможные делители свободного члена a_n уравнения (4). Сопоставляя числа (6) с числами (7), мы с уверенностью можем сказать, что только те из чисел этих рядов могут быть корнями уравнения (4), которые одновременно находятся в обоих этих рядах.

Преимущество предлагаемого способа состоит в том, что с помощью его устраняется большая часть делителей свободного члена и тем облегчается работа по испытанию этих делителей. Действительно, обычно свободный член уравнения имеет много делителей и испытывать, какие из них являются корнями уравнения, бывает делом громоздким и затруднительным. Чтобы сократить число испытаний, приходится находить границы корней уравнения, но некоторые способы дают довольно высокие границы, другие же, как способ Ньютона, требуют немало времени и вычислений. Предлагаемый здесь способ отыскания рациональных корней в один прием (редко в два) значительно уменьшает число потребных испытаний, а иногда и совершенно устраняет их; при этом он не требует нахождения границ корней.

Если $f(h)$ обращается в нуль, то $x=h$ есть корень уравнения (4). Хотя мы и отыскивали таким образом один корень уравнения, но не устранили лишних делителей свободного члена, и отыскание других корней представляет прежние трудности. В таких случаях надо подставлять какое-нибудь другое число. Во избежание больших вычислений следует h брать равным $\pm 1, \pm 2, \pm 10$. Подстановка $h = 1, -1, 2, -2$ очень хорошо устраняет двузначные делители, но медленно однозначные. Подстановка же чисел 10 и -10 хорошо устраняет однозначные делители, но сама по себе довольно громоздка, и полученный результат не окупает затраты времени на вычисление.

Если число $f(h)$ имеет много делителей, то выгоднее вместо h подставлять другое число, которое дает $f(h)$, имеющее меньшее количество делителей. Целесообразно сначала вычислить $f(1)$ и $f(-1)$ ¹⁾ и из полученных чисел брать то, которое имеет меньшее количество делителей. Если в один прием не устраняется большая часть делителей, то следует то же проделать еще раз и для другого значения h и тогда сопоставить полученные три ряда значений.

Формулировать правило можно так:

1. Отыскать значение $f(h)$. (Если $f(h) = 0$, то взять иное значение для h .)
2. Выписать все делители числа $f(h)$ (как положительные, так и отрицательные).
3. Увеличить каждый из этих делителей на h .

¹⁾ Эти значения функции $f(x)$ легко вычисляются: $f(1)$ равна сумме коэффициентов уравнения, а $f(-1)$ равна сумме коэффициентов после перемены знаков коэффициентов при нечетных степенях x .

4. Из полученных чисел отбросить те, которые не являются делителями свободного члена уравнения.

5. Оставшиеся после этого делители свободного члена испытать, не являются ли они корнями данного уравнения¹⁾).

При испытании следует помнить, что абсолютное значение произведения корней равно абсолютному значению свободного члена. Поэтому свободный член следует делить на найденный корень, полученное частное на второй найденный корень и т. д. и испытывать только те из найденных делителей, которые будут делителями последовательных частных.

6. Если увеличенные на h делители числа $f(h)$ не встречаются среди делителей a_n , то данное уравнение рациональных корней не имеет.

7. Найденные корни следует подставить в первую производную, чтобы убедиться, не будут ли они кратными. Если какой-либо из корней окажется кратным, следует подставить его во вторую производную и т. д.

Не следует, однако, механически проверять все возможные делители. Надо сообразоваться также со свойствами данного уравнения. Например, если все знаки в уравнении положительны, то все вещественные корни уравнения отрицательны; в этом случае нет надобности испытывать положительные делители. Если в уравнении знаки коэффициентов при четных степенях x (в том числе и свободный член) обратны знакам коэффициентов при нечетных степенях x , то уравнение не имеет отрицательных корней, а следовательно, нет надобности подставлять отрицательные делители.

Во всяком уравнении (полном или неполном) число положительных корней не может превышать число перемен знаков при его коэффициентах, а во всяком полном уравнении число отрицательных корней не может превышать число повторений знаков при его коэффициентах. Если число найденных положительных корней равно числу перемен знаков, то оставшихся положительных делителей можно уже не испытывать, а следует перейти к испытанию отрицательных делителей и т. д.

Некоторые дополнительные указания даются попутно с решениями уравнений.

Переходим к нахождению рациональных корней уравнений предложенным здесь способом. Уравнения взяты из различных учебников, и для сравнения указывается количество страниц, занятых обычными вычислениями.

¹⁾ Чтобы избежать возведения в степень чисел и умножения на коэффициенты, целесообразно представить уравнение в ином виде.

Например, уравнение $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ можно представить в таком виде:

$$\{[(x + a_1)x + a_2]x + a_3\}x + a_4 = 0.$$

Пример 1. $x^5 - 10x^4 - x^3 + 7x^2 - 100x - 1200 = 0$.

К. П о с с е, Курс дифференциального и интегрального исчисления, СПб 1903, стр. 294.

Свободный член 1200 имеет 60 делителей, а именно:

$$\begin{aligned} &\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 16, \pm 20, \pm 24, \\ &\pm 25, \pm 30, \pm 40, \pm 48, \pm 50, \pm 60, \pm 75, \pm 80, \pm 100, \pm 120, \pm 150, \\ &\pm 200, \pm 240, \pm 300, \pm 400, \pm 600, \pm 1200. \end{aligned} \quad (A)$$

Рациональные корни уравнения следует искать среди этих 60 делителей. Чтобы работу несколько сократить, можно было бы найти границы корней; тогда испытаний пришлось бы сделать меньше. Предлагаемый здесь способ не требует отыскания границ корней; он в один прием значительно сократит число делителей.

Отыскиваем $f(1) = -1303$.

Его делители

$$-1303, -1, 1, 1303.$$

Увеличивая каждый делитель на 1, получаем:

$$-1302, 0, 2, 1304. \quad (B)$$

Из этих четырех чисел только число 2 является делителем 1200. Но число 2 не есть корень уравнения, так как $f(2) = -1538$, т. е. не равно нулю. Следовательно, уравнение не имеет рациональных корней.

Можно было, не делая подстановки в уравнение числа 2, продолжить работу тем же способом. А именно, находим, что

$$f(-1) = -1103.$$

Делители:

$$1103, -1, 1, 1103.$$

Уменьшаем каждый на 1, имеем:

$$-1104, -2, 0, 1102. \quad (B)$$

Сопоставляя числа (A), (B) и (B), видим, что среди них нет общих делителей, следовательно, заданное уравнение не имеет рациональных корней. Таким образом мы обошлись и без нахождения границ корней и без испытания делителей (а ведь их было 60).

Пример 2. $x^5 - 34x^3 + 29x^2 + 212x - 300 = 0$.

$f(1) = -92$. Делители таковы:

$$-92, -46, -23, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 23, 46, 92.$$

Увеличиваем каждый на 1, имеем:

$$-91, -45, -22, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 24, 47, 93.$$

Из них делителями числа 300 являются:

$$-3, -1, 2, 3, 5.$$

$f(-1) = -450$. Так как возможные корни однозначны ($-3, -1, 2, 3, 5$), то ограничиваемся только однозначными делителями числа 450, имеем:

$$-9, -6, -5, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 9.$$

Вычитая из каждого по 1, получаем:

$$-10, -7, -6, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 8.$$

Сопоставляя с найденными ранее, получаем возможные корни:

$$-3, 2, 5.$$

Подстановка убеждает нас, что корнями уравнения будут только числа -3 и 2 .

Частное от деления свободного члена на произведение найденных рациональных корней $\frac{300}{3 \cdot 2} = 50$ показывает, что корень -3 не может быть кратным. Под-

становка же числа 2 в производную $5x^4 - 102x^2 + 58x + 212$ дает нуль. Следовательно, рациональные корни этого уравнения — 3, 2 и 2.

У Кояловича („Лекции по высшей математике“, Госиздат, 1923, т. II, вып. I, стр. 48) понадобилось две страницы только на определение границ корней этого уравнения. У Тихомандрицкого („Высшая алгебра“, Харьков 1887, стр. 86—88) нахождение рациональных корней уравнения заняло две страницы текста. У Граве („Элементы высшей алгебры“, Киев 1914, стр. 442—443) понадобилось полторы страницы сжатых рассуждений и вычислений. У Серре („Cours d'algèbre supérieure“, T. I, p. 325—332, Paris 1877, — эта книга является первоисточником рассматриваемого уравнения) нахождение рациональных корней занимает больше страницы сжатого изложения.

Предлагаемым же здесь способом нахождение рациональных корней заняло всего полстраницы тетради, несмотря на подробное и элементарное изложение.

Пример 3. $6x^5 + 11x^4 + 5x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$.

Б. М. Коялович, Лекции по высшей математике, т. I, вып. II, Госиздат, 1923, стр. 54—57.

Подставляя вместо $x = \frac{z}{6}$, имеем:

$$z^5 + 11z^4 + 30z^3 + 180z^2 - 216z - 7776 = 0,$$

$$f(1) = -7770.$$

Его делители:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 37, 70, 74, 105, 111, 210, 222, 259, 370, 518, 555, 777, 1295, 1554, 2590, 3435, 7770.

Беря их с плюсом и с минусом и прибавляя к ним 1, мы выпишем лишь те из них, которые являются делителями 7776, а именно:

$$-36, -9, -6, -4, -2, -1, 2, 3, 4, 6, 8, 16, 36. \quad (\Gamma)$$

$f(-1) = -7400$. Делители этого числа:

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 37.$$

Беря их с плюсом и с минусом и вычитая из них 1, выписываем лишь те делители, которые встречаются в (B). Имеем:

$$-9, -6, -3, -2, 1, 3, 4, 24, 36.$$

В уравнении четыре повторения знаков и одна перемена их, следовательно, уравнение имеет 2 или 4 отрицательных корня и один положительный корень.

Испытания дают $z_1 = -9$, $z_2 = -6$, $z_3 = 4$. Следовательно, $x_1 = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$,

$x_2 = -1$, $x_3 = \frac{2}{3}$. (У Кояловича отыскание рациональных корней этого уравнения занимает три страницы, 54—57.)

В курсах высшей алгебры для отыскания рациональных корней рекомендуется узнать, будет ли целым числом $\frac{f(+1)}{a-1}$ или $\frac{f(-1)}{a+1}$, где a — предполагаемый корень уравнения; этот способ

по конечному результату напоминает изложенный здесь способ.

Общепринятый способ предлагает делить $f(\pm 1)$ на $a \mp 1$, где a есть предполагаемый корень уравнения. Студенту приходится наметить ряд чисел для проб и произвести все эти пробы; он не дает ответа, когда $f(\pm 1) = 0$, и не дает

уверенности в том, что исчерпаны все возможные рациональные корни, если не проделаны все пробы.

Излагаемый здесь способ теоретически очень прост и доступен, не требует никаких дополнительных теоретических обоснований, не требует от изучающего знания никаких вспомогательных теорем и способов: отсеиваемые им делители свободного члена безусловно корнями уравнения быть не могут; этот способ не требует никаких догадок, не требует запоминания определенных формул для устных вычислений (как, например, способ Хорнера). Требуемые им вычисления чрезвычайно элементарны и просты и сводятся к разложению свободного члена на множители. Эти вычисления производятся устно. Таким образом способ этот вполне пригоден для кратких курсов высшей алгебры.

О ФОРМУЛЕ КАРДАНА

Н. А. Извольский (Москва)

Предлагаемые здесь очень простые соображения, относящиеся к формуле Кардана, быть может заслуживают некоторого внимания ввиду того, что 1) в курсах высшей алгебры обычно их нет (лишь в курсе Серре даются в этом направлении указания, которые, однако, не доводятся до конца) и 2) эти соображения восполняют картину решения кубического уравнения.

Как известно, формула Кардана дает решение уравнения

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1)$$

Она имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Эта формула дает девять значений, из которых лишь три удовлетворяют уравнению (1). Если обозначим кубические радикалы, входящие сюда, через u и v , то для них надо брать лишь значения, удовлетворяющие соотношению $uv = -\frac{p}{3}$.

Если $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ (это — кубические корни из единицы), если u_1 и v_1 суть простейшие значения u и v , удовлетворяющие соотношению $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$, то корни уравнения (1) суть:

$$x_1 = u_1 + v_1, \quad x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1, \quad x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.$$

Возникает вопрос: корнями какого уравнения служат остальные шесть значений для x , получаемых из формулы Кардана.

При выводе формулы Кардана условие $uv = -\frac{p}{3}$ приходится „испортить“ возведением в куб,—получаем $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$; если теперь, обратно, отсюда определим uv , то получим:

$$1) uv = -\frac{p}{3}, \quad 2) uv = -\frac{p\epsilon}{3}, \quad 3) uv = -\frac{p\epsilon^2}{3}.$$

Для уравнения (1) нужно лишь первое из них, а остальные шесть значений формулы Кардана, очевидно, будут корнями уравнений:

$$x^3 + px + q = 0 \quad \text{и} \quad x^3 + p\epsilon^2x + q = 0 \quad ^1).$$

Чтобы не выходить из области рациональности, определяемой коэффициентами p и q , перемножением этих уравнений (имея в виду, что $\epsilon^3 = 1$ и $\epsilon + \epsilon^2 = -1$) получаем искомое уравнение шестой степени:

$$x^6 - px^4 + 2qx^3 + p^2x^2 - pqx + q^2 = 0. \quad (2)$$

Если обозначим сумму всевозможных произведений корней этого уравнения по k множителей в каждом через Σ_k , то легко увидим соотношения между его корнями:

$$\Sigma_4 = (\Sigma_2)^2; \quad \Sigma_5 = \frac{1}{2} \Sigma_2 \Sigma_3; \quad \Sigma_6 = \frac{1}{4} (\Sigma_3)^2.$$

Из уравнений (1) и (2) умножением получим уравнение девятой степени, все корни которого даются формулой Кардана. Вот это уравнение:

$$x^9 + 3qx^6 + (p^3 + 3q^2)x^3 + q^3 = 0. \quad (3)$$

К нему можно отнестись двояко: во-первых, заменим q через a и $p^3 + 3q^2$ через b . Тогда придем к заключению, что уравнение вида:

$$x^9 + 3ax^6 + bx^3 + a^3 = 0, \quad (4)$$

можно решать по формуле Кардана, применяя ее к уравнению

$$x^3 + \sqrt[3]{b - 3a^2} \cdot x + a = 0$$

(так как из $p^3 + 3a^2 = b$ следует $p = \sqrt[3]{b - 3a^2}$), и все 9 значений этой формулы суть корни уравнения (4).

Во-вторых, раскрыв скобки в уравнении (3), мы можем написать его в форме:

$$(x^3 + q)^3 + p^3x^3 = 0. \quad (5)$$

Ясен переход от уравнения (1) к уравнению (5). Отсюда вытекает: если имеется уравнение вида:

$$(x^3 + a)^3 + bx^3 = 0,$$

¹⁾ Этим и ограничиваются указания в курсе Серре.

то все его корни можно найти по формуле Кардана, применяя последнюю к уравнению

$$x^3 + \sqrt[3]{b} x + a = 0.$$

Можно идти далее: пусть $x^3 + q = z$; тогда уравнение (5) дает:

$$z^3 + p^3 z - p^3 q = 0. \quad (6)$$

Если теперь от этого уравнения сделать переход такой же, как переход от уравнения (1) к уравнению (5), то придем к уравнению:

$$(z^3 - p^3 q)^3 + p^9 z^3 = 0, \quad (7)$$

или

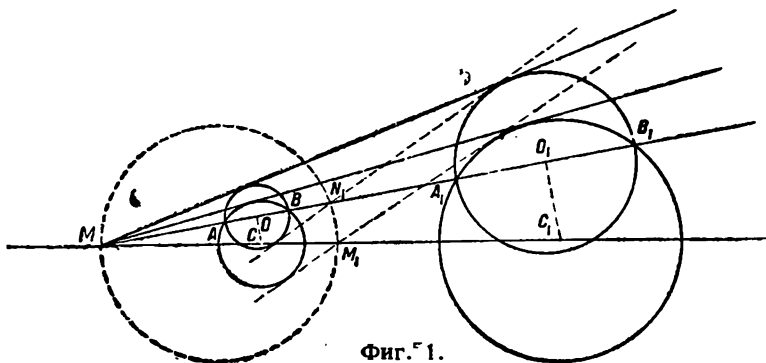
$$[(x^3 + q)^3 - p^3 q]^3 + p^9 (x^3 + q)^3 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение двадцать седьмой степени, корни которого определяются также по формуле Кардана: именно решаем уравнение (6), получим девять значений для z , — это суть девять корней уравнения (7), и тогда из $x = \sqrt[3]{z - q}$ получим для каждого значения z три значения для x — всего получим 27 значений, и они суть корни уравнения (8).

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИСТЕМЫ ДВУХ КРУГОВ

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону)

Пусть точки M и M_1 — внешний и внутренний центры подобия двух данных кругов (C) и (C_1) с центрами в точках C и C_1 . Лучи пучка прямых с вершиной в точке M пересекают окружности (C) и (C_1) соответственно в точках A и B и в точках A_1 и B_1 (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предметом настоящей заметки будет определение геометрического места внутренних центров подобия кругов с диаметрами AB и A_1B_1 .

Известно, что два центра подобия двух кругов (C) и (C_1) гармонически разделяют отрезок, соединяющий центры данных кругов¹⁾.

Обозначим центры кругов с диаметрами AB и A_1B_1 соответственно через O и O_1 . Пары кругов (O) и (C) , с одной стороны, и (O_1) и (C_1) — с другой имеют общую радикальную ось AB , следовательно, их внешним центром подобия будет также точка M . Внутренний центр подобия кругов (O) и (O_1) обозначим через N_1 . На основании вышеуказанных свойств имеем:

$$\frac{MC}{MC_1} = -\frac{M_1C}{M_1C_1}, \quad (1)$$

$$\frac{MO}{MO_1} = -\frac{N_1O}{N_1O_1}. \quad (2)$$

Следовательно, ряды точек на двух прямых MC и MO , как имеющие равные ангармонические отношения, равные -1 , проективны; они имеют общую соответственную точку M , следовательно, эти ряды точек перспективны. Так как прямые CO и C_1O_1 перпендикулярны к прямой пучка AB , то CO и C_1O_1 параллельны, и центр перспективы данных рядов — бесконечно удаленная точка. Итак, M_1N_1 , параллельная CO , будет перпендикулярна к AB , т. е. искомое геометрическое место точек N_1 будет окружность с диаметром MM_1 .

ДВА СВОЙСТВА АСТРОИДЫ

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону)

1. Геометрическое место точек, прямоугольные декартовы координаты которых равны радиусам кривизны эллипса в концах двух его сопряженных диаметров, есть астроида.

Пусть уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ эллипса взяты в концах двух его сопряженных диаметров; поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} &= -\frac{b^2}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹⁾ Rouché et de Comberousse, Traité de géométrie, I partie, 1922 стр. 255.

Последнее из равенств (2) дает нам:

$$\frac{x_1}{y_2} = -\frac{y_1}{x_2},$$

или, после возведения обеих частей в квадрат:

$$\frac{x_1^2}{a^2} = \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \pm \frac{y_2}{b}, \\ x_2 &= \mp \frac{y_1}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Параметрическое уравнение эллипса:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Радиус кривизны:

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}. \quad (6)$$

Условия (4) дадут нам:

$$\left. \begin{aligned} \cos t_1 &= \pm \sin t_2, \\ \cos t_2 &= \mp \sin t_1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где t_1 соответствует точке M и t_2 — точке N .

$$\rho_M = \frac{(a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \quad (8)$$

$$\rho_N = \frac{(a^2 \sin^2 t_2 + b^2 \cos^2 t_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(a^2 \cos^2 t_1 + b^2 \sin^2 t_1)^{\frac{3}{2}}}{ab}. \quad (9)$$

Точки искомого геометрического места имеют координаты:

$$x = \rho_M \quad \text{и} \quad y = \rho_N,$$

следовательно:

$$\left. \begin{aligned} (abx)^{\frac{2}{3}} &= a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1, \\ (aby)^{\frac{2}{3}} &= a^2 \cos^2 t_1 + b^2 \sin^2 t_1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Складывая равенства (10) почленно, находим уравнение:

$$(abx)^2 + (aby)^2 = a^2 + b^2,$$

или

$$x^2 + y^2 = \left[\frac{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \right]^2, \quad (11)$$

т. е. искомое геометрическое место есть астроида.

2. Огибающая осей парабол, которые имеют с данным эллипсом двойное соприкосновение в точках касания касательных к эллипсу, проведенных из точек окружности Шаля, есть астроида.

Пусть уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (1)$$

тогда уравнение окружности Шаля:

$$x^2 + y^2 = (a + b)^2. \quad (2)$$

Совокупность двух касательных, проведенных из точки ξ, η окружности Шаля к эллипсу, будет:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right) - \left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - 1 \right)^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение любого конического сечения, которое имеет с данным эллипсом двойное соприкосновение в точках касания касательных, проведенных из точки (ξ, η) , будет:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right) - \left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - 1 \right)^2 - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0, \quad (4)$$

или

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left[\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - (\lambda + 1) \right] - \left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - 1 \right)^2 = 0. \quad (5)$$

Для параболы должно иметь место:

или

$$\lambda_1 = -1,$$

или

$$\lambda_2 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1,$$

при λ_2 имеем случай параболы, распавшейся на пару слившихся прямых.

Итак, общее уравнение параболы, имеющей с эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (1)$$

двойное соприкосновение в точках касания касательных к эллипсу, проведенных из точек окружности Шаля, будет:

$$(x\eta + y\xi)^2 + 2xb^2\xi + 2ya^2\eta - (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2) = 0. \quad (6)$$

Уравнение ее оси:

$$x\eta + y\xi + \frac{(a^2 + b^2)\xi\eta}{\eta^2 + \xi^2} = 0. \quad (7)$$

Так как

$$\xi^2 + \eta^2 = (a + b)^2, \quad (2)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (a + b) \cos \varphi, \\ \eta &= (a + b) \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Следовательно, уравнение оси параболы:

$$(a + b)(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + (a^2 + b^2) \cos \varphi \sin \varphi = 0. \quad (9)$$

Последнее уравнение представляет семейство прямых, зависящее от одного параметра φ . Найдем его огибающую, для чего продифференцируем последнее уравнение по φ :

$$(a + b)(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + (a^2 + b^2)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0. \quad (10)$$

Из уравнений (9) и (10) находим:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos^3 \varphi, \\ y &= r \sin^3 \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$r = -\frac{a^2 + b^2}{a + b};$$

или, исключая переменный параметр φ ,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}. \quad (12)$$

Итак, искомая огибающая осей парабол, которые имеют с данным эллипсом двойное соприкосновение в точках касания касательных к эллипсу, проведенных из точек окружности Шаля, будет астроида.

КРИВЫЕ, СВЯЗАННЫЕ СО ВЗАИМНЫМИ ОКРУЖНОСТЯМИ

М. М. Иванченко (Харьков)

Взаимными окружностями называются окружности, каждая из которых есть геометрическое место точек, взаимных относительно другой, являющейся управляющей относительно первой.

Как известно, взаимными точками относительно данной управляющей окружности называются точки B и A , лежащие на продолжении диаметра, такие, что

$$BO \cdot OA = OC^2,$$

где O —центр данной окружности и OC —радиус ее.

Две ортогональные окружности всегда будут взаимными. Легко видеть, что если мы возьмем такие окружности и проведем из центра O_1 одной из них луч, который будет пересекать вторую окружность в точках A_2 и B_2 , а первую—в точке C_1 , то мы будем иметь такие соотношения:

$$C_1B_2 : O_1C_1 = A_2C_1 : O_1A_2,$$

$$O_1B_2 : O_1C_1 = O_1C_1 : O_1A_2.$$

Такие же соотношения мы будем иметь и для всех лучей, проведенных из центра O_2 второй окружности.

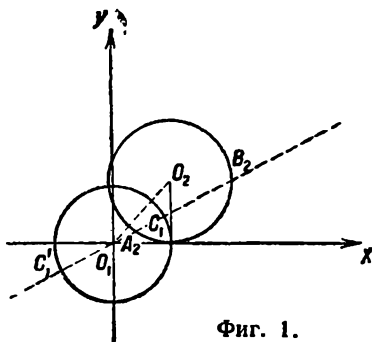
Из этих двух соотношений можно получить:

$$\frac{O_1B_2 + m \cdot C_1B_2}{O_1C_1 + m \cdot A_2C_1} = \frac{R_1}{R_1 - A_2C_1},$$

где $m \neq 0$ и $R_1 = O_1C_1$ —радиус первой окружности (фиг. 1).

Обозначив в последнем равенстве члены первого отношения соответственно через ϱ_m и ϱ'_m , мы запишем его так:

$$\frac{\varrho_m}{\varrho'_m} = \frac{R_1}{R_1 - A_2C_1}. \quad (1)$$



Фиг. 1.

Радиусы-векторы ϱ_m и ϱ'_m выходят из неподвижного полюса O_1 . Их отношение зависит от A_2C_1 —длины отрезка, заключенного между точками первой и второй окружностей. Концы ϱ_m и ϱ'_m при вращении радиуса O_1C_1 около O_1 будут описывать кривые, вообще различные, однако, при пересечении их прямыми, которые проходят через O_1 , для всех точек пересечения будет удовлетворяться равенство (1) (фиг. 2 и 3).

Найдем уравнение этих кривых.

Возьмем начало прямоугольных декартовых координат в точке O_1 —центре первой окружности, тогда центр O_2 второй окружности можно взять в точке (R_1, R_2) , где R_2 есть длина радиуса второй окружности. (Нетрудно проверить, что в этом случае окружности будут ортогональны.) Тогда

$$\varrho_m = r + m(r - R_1), \quad (2)$$

где $r = O_1B_2$ и, следовательно, $r = R_1 + C_1B_2$.

Уравнение окружности O_2 в полярных координатах с полюсом в точке O_1 и полярной осью OX будет:

$$R_2^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta_1 - \theta), \quad (3)$$

где $r_1 = O_1O_2$, $\theta_1 = \angle XO_1O_2$ и θ —полярный угол.

Сопоставляя (4) и (4'), убеждаемся, что кривые q_m можно получать как частные случаи кривых q_m при некоторых значениях $m < 0$, а именно:

$$q_{-k} \equiv \bar{q}_{k-1} \quad (5)$$

для всех $k > 0$, и наоборот:

$$q_{k-1} \equiv q_{-k}. \quad (5')$$

Исходя из этого, в соотношении (1) можно брать вместо \bar{q}_m их выражение через q , т. е.

$$\frac{q_m}{q_{-(m+1)}} = \frac{R_1}{O_1 A_2}.$$

Последнее соотношение, написанное в виде

$$q_m \cdot O_1 A_2 = R_m^2,$$

где $R_m = \sqrt{R_1 q_{-(m+1)}}$, показывает, что отрезок между точками q_m и $O_1 A_2$ делится гармонически концами того диаметра круга R_m , на котором они лежат, а потому каждая из двух точек лежит на поляре второй точки относительно круга R_m .

Переходя к декартовым координатам, для наших кривых получим такие уравнения:

для кривых q_m :

$$\begin{aligned} [(x^2 + y^2) - 2(1+m)(R_1 x + R_2 y) + (1+2m+2m^2)R_1^2]^2 (x^2 + y^2) = \\ = 4R_1^2 m^2 [(x^2 + y^2) - (1+m)(R_1 x + R_2 y)]^2; \end{aligned} \quad (q_m)$$

для кривых q_m , имея в виду (5), получим:

$$\begin{aligned} [(x^2 + y^2) + 2m(R_1 x + R_2 y) + (1+2m+2m^2)R_1^2]^2 (x^2 + y^2) = \\ = 4R_1^2 (m+1)^2 [(x^2 + y^2) + m(R_1 x + R_2 y)]^2. \end{aligned} \quad (\bar{q}_m)$$

Если $m = 1$, т. е. когда $q_1 = O_1 B_2 + B_2 C_1$ (отрезок $B_2 C_1$ откладывается по радиусу-вектору от точек окружности O_2 один раз), уравнения кривых q_1 будут иметь вид:

$$\begin{aligned} [(x^2 + y^2) - 4(R_1 x + R_2 y) + 5R_1^2]^2 (x^2 + y^2) = \\ = 4R_1^2 [(x^2 + y^2) - 2(R_1 x + R_2 y)]^2, \end{aligned} \quad (q_1)$$

а кривых \bar{q}_1 ($\bar{q}_1 = 2R_1 - O_1 A_2$, отрезок $A_2 C_1$ откладывается по радиусу-вектору от точек окружности O_1 один раз):

$$\begin{aligned} [(x^2 + y^2) + 2(R_1 x + R_2 y) + 5R_1^2]^2 (x^2 + y^2) = \\ = 16R_1^2 [(x^2 + y^2) + (R_1 x + R_2 y)]^2. \end{aligned} \quad (\bar{q}_1)$$

Рассмотрим теперь вид кривых q_m . Пусть их уравнения обозначены:

$$F_m(x, y) = 0. \quad (1)$$

Низшие члены уравнения (1) второго порядка, следовательно, кривые в начале координат имеют двойную точку.

Введем обозначение:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_m(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F_m(x, y)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 F_m(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_m(x, y)}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}.$$

Тогда для $x = y = 0$ будем иметь:

$$\Delta_m = 4(2m + 2m^2)^4 R_1^6 R_2^2 - \\ - 2R_1^4 (1 + 2m)^2 \cdot [2R_1^4 (1 + 2m + 2m^2)^2 - 2R_1^2 R_2^2 (2m + 2m^2)^2].$$

Или, имея в виду, что

$$(2m + 2m^2)^2 + (1 + 2m)^2 = (1 + 2m + 2m^2)^2,$$

будем иметь:

$$\Delta_m = 4(1 + 2m + 2m^2)^2 R_1 [(2m + 2m^2) R_2 + \\ + (1 + 2m) R_1] [(2m + 2m^2) R_2 - (1 + 2m) R_1].$$

Отсюда мы видим, что при $m > 0$ знак Δ_m зависит только от разности

$$(2m + 2m^2) R_2 - (1 + 2m) R_1,$$

а при $m < 0$ этот знак зависит от суммы

$$(2m + 2m^2)^2 R_2^2 + (1 + 2m) R_1.$$

А так как при $|m| \geq 1$

$$2m + 2m^2 > 1 + 2m,$$

то в этом случае при

$$R_2 > \left| \frac{1 + 2m}{2m + 2m^2} \right| \cdot R_1$$

всегда $\Delta_m > 0$, т. е. кривые (I) имеют в точке (0, 0) в начале координат узловую точку.

Если же

$$R_2 = \left| \frac{1 + 2m}{2m + 2m^2} \right| \cdot R_1,$$

то $\Delta_m = 0$, т. е. в точке (0, 0) кривые (I) имеют точку возврата. А если

$$R_2 < \left| \frac{1 + 2m}{2m + 2m^2} \right| \cdot R_1,$$

то $\Delta_m < 0$, т. е. в точке (0, 0) кривые (I) имеют изолированную точку.

Следовательно, характер двойной точки зависит от соотношения между радиусами ортогональных окружностей.

В частных случаях для кривых q_1 и $q_1 \equiv q_{-2}$ мы будем иметь:

$$\Delta_1 \equiv \Delta_{-2} = (-32R_1^3 R_2^2)^2 - 18 [R_1^4 (50R_1^4 - 32R_1^2 R_2^2)],$$

или

$$\Delta_1 = \Delta_{-2} = 100R_1^6 (4R + 3R_1)(4R_2 - 3R_1).$$

А это при

$$R_2 > \frac{3}{4} R_1 \text{ дает узловую точку,}$$

при

$$R_2 = \frac{3}{4} R_1 \text{ — точку возврата,}$$

при

$$R_2 < \frac{3}{4} R_1 \text{ — изолированную точку.}$$

Заметим, что чертежи исполнены для ортогональных окружностей:

$$x^2 + y^2 = R_1^2, \quad \left(x - \sqrt{R_1^2 + R_2^2}\right)^2 + y^2 = R_2^2.$$

Для этого положения окружностей уравнения кривых будут иметь вид:

кривые ϱ_1 (фиг. 2):

$$\begin{aligned} \left[(x^2 + y^2) - 2x\sqrt{R_1^2 + R_2^2} + 5R_1^2\right]^2 (x^2 + y^2) = \\ = 4R_1^2 \left[x^2 + y^2 - 2x\sqrt{R_1^2 + R_2^2}\right]^2, \end{aligned}$$

кривые $\overline{\varrho}_1$ (фиг. 3):

$$\begin{aligned} \left[(x^2 + y^2) + 2x\sqrt{R_1^2 + R_2^2} + 5R_1^2\right]^2 (x^2 + y^2) = \\ = 16R_1^2 \left[x^2 + y^2 + x\sqrt{R_1^2 + R_2^2}\right]^2. \end{aligned}$$

Заметим, что одна ветвь кривой ϱ_1 получается при откладывании от точек A_2 и B_2 второй окружности отрезков радиуса-вектора A_2C_1 и B_2C_1 , т. е. расстояний до ближайшей точки первой окружности, следовательно, для одних точек кривой:

$$\varrho_1 = O_1B_2 + B_2M,$$

где $B_2M = B_2C_1$ и M — точка кривой, а для других:

$$\varrho_1 = O_1A_2 + A_2M_1,$$

где $A_2M_1 = A_2C_1$ и M_1 — точка кривой.

Вторая ветвь кривой получается при откладывании от тех же точек радиуса-вектора A_2C_1' и B_2C_1' , т. е. расстояний до более далеких точек первой окружности, следовательно, ϱ_1 может иметь значения:

$$\varrho_1 = O_1B_2 + B_2M_1',$$

где $B_2M' = B_2C_1'$ и M' — точка кривой или

$$\varrho_1 = O_1A_2 + A_2M_1,$$

где $A_2M_1' = A_2C_1'$ и M_1' — точка кривой.

Аналогично имеем и две ветви кривой $\overline{\varrho}_1$.

ОБОБЩЕННЫЕ КОНХОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

М. М. Иванченко (Харьков)

Пусть даны две кривые:

$$r_1 = \varphi(\theta),$$

$$r_2 = \psi(\theta),$$

заданные уравнениями в полярной системе координат, и точка O — полюс полярной системы.

Проведем из полюса радиусы-векторы OM . Если на каждом радиусе-векторе, который пересекает наши кривые в точках A_i и B_i , мы будем откладывать от точек A_i и B_i отрезки $m \cdot A_i B_i$ ($m \neq 0$), то получим точки M, M' и M_1, M_1' (фиг. 1).

Геометрическое место таких точек, концов радиусов-векторов:

$$\varrho_m = OA_i + m \cdot A_i B_i$$

и

$$\varrho_m = OB_i - m \cdot A_i B_i$$

дает новые две группы кривых, уравнения которых в полярной системе координат будут:

$$\varrho_m = \varphi(\theta) + m [\varphi(\theta) - \psi(\theta)]$$

и

$$\varrho_m = \psi(\theta) - m [\varphi(\theta) - \psi(\theta)]. \quad (A)$$

Замечая, что выражения для ϱ_m и ϱ_{-m} взаимно обратимы для каждой пары значений $(k-1)$ и $(-k)$, так что

$$\varrho_{k-1} \equiv \overline{\varrho_{-k}}$$

и

$$\varrho_{-k} \equiv \overline{\varrho_{k-1}},$$

достаточно найти одну из групп кривых, а тогда другую мы получим, заменяя m на $[-(m+1)]$.

Рассматривая (A), мы видим, что эти уравнения для $m=1$ и, если вместо $\varphi(\theta) - \psi(\theta)$ брать постоянную величину a , дают уравнения так называемых конхоидальных кривых¹⁾, наиболее

¹⁾ Hilton H., Plane Algebraic curves, 1920, стр. 177 дает общее определение конхоидальной кривой как геометрического места точек Q , которое получим, откладывая на радиусах-векторах OP отрезки $PQ = \pm a$, где a — величина постоянная.

Такое же определение мы имеем у G. Loria, Algebraische und transcendente Kurven, 1-е изд., стр. 135, у Teixeira, а также у B r o c a r d et L e m o u n e, Courbes géométriques remarquables, т. I, 1919, стр. 230.

известными из которых являются конхоида прямой (конхоида Никомеда) и конхоида круга (улитка Паскаля). Поэтому уравнения (А) можно считать уравнениями обобщенных конхоидальных кривых.

Чтобы получить уравнения обобщенных конхоидальных кривых для двух данных кривых, заданных в декартовых координатах, мы преобразуем их уравнения в полярные с одним и тем же полюсом, и в полученные полярные уравнения вместо r_1 и r_2 поставим соответственно $r_1 + m(r_1 - r_2)$ и $r_1 - m(r_1 - r_2)$, а потом снова перейдем к декартовой системе координат и, таким образом, мы получим уравнения искомых кривых. Кривые взаимных окружностей будут, очевидно, частным случаем конхоидальных кривых¹⁾.

Если взять окружность

$$r_1 = 2b \cos \theta$$

и никомедову конхоиду

$$r_2 = \frac{a}{\cos \theta} \pm k,$$

то для них конхоидальные кривые будут иметь уравнения:

$$\varrho_m = 2b \cos \theta + m \left| 2b \cos \theta - \frac{a}{\cos \theta} \pm k \right|$$

или

$$\varrho_m \cos \theta = 2b \cos^2 \theta (1 + m) - ma + mk \cos \theta,$$

что в декартовой системе координат даст:

$$x = 2b(1 + m) \frac{x^2}{x^2 + y^2} - am \pm \frac{mkx}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

или окончательно:

$$[(x^2 + y^2)(x + am) - 2b(1 + m)x^2]^2 = m^2 k^2 x^2 (x^2 + y^2),$$

т. е. мы имеем кривую шестого порядка.

Заметим, что такие кривые могут быть не только алгебраическими, но и трансцендентными, причем построение их достигается простым откладыванием на радиусах-векторах от точек данных кривых отрезков AM и AM' , равных соответственно $m \cdot AB$ и $m \cdot AB'$ по одну сторону кривой r_1 , а также BM_1 и $B'M'$ по другую сторону кривой r_2 . Точки M будут точками искомых кривых, причем число их зависит от числа точек пересечения данных кривых радиусом-вектором.

¹⁾ См. статью автора „Кривые, связанные со взаимными окружностями“.

ЦИССОИДЫ ЭЛЛИПСА И ГИПЕРБОЛЫ

Д. М. Синцов (Харьков)

Циссоидальной кривой двух данных кривых:

$$r = f(\theta) \text{ и } r = \varphi(\theta),$$

называют кривую, полярный радиус-вектор которой равен разности полярных радиусов этих кривых. Ее уравнение, таким образом, будет:

$$r = f(\theta) - \varphi(\theta).$$

Варьируя данные кривые, можно, таким образом, получить бесчисленное множество кривых. Если, в частности, за одну кривую возьмем круг, проходящий через полюс, с центром на полярной оси, а за другую — касательную к кругу в противоположном полюсу конце диаметра, получим обыкновенную циссоиду.

Приняв за одну кривую параболу, за вторую — круг кривизны в ее вершине и поместив в последний полюс, мы получаем любопытную кривую, которой я посвятил небольшую заметку¹⁾. Она имеет очень простое уравнение, в начале координат тройную точку с тремя совпавшими касательными (так называемый *Spitzpunkt* — точка притупления, — ибо касательная перпендикулярна к оси симметрии кривой) и, что особенно интересно, уединенную касательную.

Аналогично можно построить соответствующую кривую, заменив параболу эллипсом, круг кривизны в вершине которого также имеет с кривой прикосновение третьего порядка и целиком лежит или внутри эллипса (если берем конец большой оси), или вне него (если берем конец малой оси).

1. ЦИССОИДА ЭЛЛИПСА

Отнесем эллипс (фиг. 1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

к вершине $(-a, 0)$. Получим:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad \left(p = \frac{b^2}{a}\right). \quad (1)$$

Радиус кривизны в вершине $(-a, 0)$ равен p , и уравнение круга кривизны в преобразованных координатах

$$x^2 + y^2 = 2px.$$

Соответствующие полярные уравнения этих кривых

$$1) \quad r = \frac{2ap \cos \theta}{a \sin^2 \theta + p \cos^2 \theta} \equiv \frac{2ab^2 \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

$$2) \quad r = 2p \cos \theta \equiv \frac{2b^2 \cos \theta}{a}.$$

¹⁾ „Этюды по теории плоских кривых“. II. „Об одной любопытной циссоидальной кривой“, Наук. зап. и.-д. мат. катедер України, вып. II, 1926, стр. 75.

Искомая кривая имеет поэтому уравнение:

$$r = \frac{2b^2 \cos \Theta}{a(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)} [a^2 - a^2 \sin^2 \Theta - b^2 \cos^2 \Theta] = \\ = \frac{2(a^2 - b^2)b^2 \cos^3 \Theta}{a(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)}, \quad (2)$$

или в прямоугольных координатах, с началом в вершине эллипса:

$$(x^2 + y^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2) = 2pc^2 x^3 \quad (c^2 = a^2 - b^2), \quad (3)$$

или

$$(x^2 + y^2)(ay^2 + px^2) - 2p(a - p)x^3 = 0. \quad (3')$$

Это — кривая четвертого порядка, имеющая в начале координат тройную точку с тремя совпавшими касательными (так называемый Spitzpunkt — точка притупления). Ось x -в кривая встречает в точках:

$$y = 0, \quad b^2 x^4 = 2pc^2 x^3,$$

что дает для x тройной корень $x = 0$ и простой

$$x = \frac{2c^2}{a}. \quad \text{Эта последняя}$$

точка лежит внутри эллипса ($c^2 < a^2$). По отно-

шению же к кругу кривизны эта точка лежит

внутри круга кривизны, если $a < b\sqrt{2}$. Касательная к этой точке будет обыкновенной касательной: подставляя $x = \frac{2c^2}{a}$ в уравнение кривой (3), получим:

$$\Omega(y) \equiv a^2 y^4 + \frac{4y^2 c^4}{a^2} (a^2 + b^2),$$

при

$$y = 0, \quad \Omega(0) = 0, \quad \Omega'(0) = 0, \quad \Omega''(0) = 0.$$

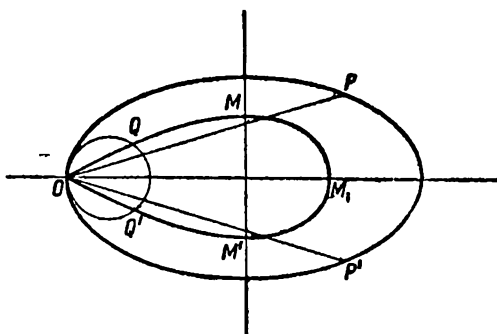
Не будет она и особенною точкою: при $x = \frac{2c^2}{a}$, $y = 0$ левая часть (3) обращается в нуль, но частные производные ее по x и по y при этом не равны нулю.

Точки перегиба отыскиваются без труда. Сделаем уравнение (3) однородным:

$$a^2 y^4 + (a^2 + b^2) x^2 y^2 + b^2 x^4 - 2 \frac{b^2 c^2}{a} x^3 z = 0.$$

Гессиена в данном случае

$$-72 \frac{b^4 c^4}{a^2} x^4 [6a^2 y^2 + (a^2 + b^2) x^2] = 0.$$



Фиг. 1.

Если исключить особенную точку, то собственно точек перегиба окажется две, но обе мнимые — из

$$6a^2y^2 + (a^2 + b^2)x^2 = 0.$$

Кроме того, кривая имеет уединенную двойную касательную.

Действительно, подстановка в (3') $x = -\frac{8ap}{a-p}$ дает:

$$a \left(y^2 + \frac{64a^2p^2}{(a-p)^2} \right) \left(a^2y^2 + \frac{64a^2b^2p^2}{(a-p)^2} \right) + 2 \cdot \frac{8^2a^3p^3}{(a-p)^3} b^2c^2,$$

если положить, что $c^2 = a(a-p)$, $b^2 = ap$.

Это уравнение для y приводится к виду:

$$a^3 \left[y^2 + 32 \frac{a(a+p)}{(a-p)^2} p^2 \right]^2 = 0.$$

Отсюда плюккеровы числа кривой $d=1$, $r=2$ (ибо точка притупления разлагается на две точки возврата и узел), затем двойственные числа: $\delta=1$, $\varrho=2$.

Таким образом класс $n=4 \cdot 3 - 2 - 6 = 4$, род $= \frac{3 \cdot 2}{2} - 2 - 2 = 0^1$.

Кривая, следовательно, уникурсальная. Мы можем действительно легко представить ее уравнение в параметрической форме.

Положим $y = xt$. Уравнение (3) дает по сокращении на x^3 :

$$(1+t^2)(at^2+p)x - 2p(a-p) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2p(a-p)}{(1+t^2)(p+at^2)},$$

и, следовательно,

$$y = \frac{2p(a-p)t}{(1+t^2)(p+at^2)}.$$

Отсюда находим:

$$dx = -4p(a-p) \frac{[p+a+2at^2]t dt}{(1+t^2)(p+at^2)^2},$$

$$dy = 2p(a-p) \frac{[p-(p+a)t^2-3at^4] dt}{(1+t^2)(p+at^2)^2}.$$

Подставляя в коэффициенты уравнения касательной

$$u = \frac{dy}{dx}, \quad v = x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right),$$

¹⁾ d — число двойных точек с различными касательными, r — число точек возврата, δ — число двойных касательных, ϱ — число возвратных касательных, т. е. точек перегиба.

получим:

$$u = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p - (p+a)t^2 - 3at^4}{(p+a+2at^2)t}, \quad v = -\frac{p(a-p)}{(p+a+2at^2)t}$$

— тангенциальное уравнение в параметрической форме.

Примечание. Если бы стали строить циссоидальную кривую для пары окружностей, касающихся в некоторой точке, проводя секущие из этой точки, то получили бы снова окружность, проходящую через общую точку данных окружностей и имеющую в ней ту же касательную. Действительно, уравнение данных окружностей пусть

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2bx;$$

тогда искомая циссоидальная кривая имеет уравнение:

$$x^2 + y^2 = 2(a-b)x.$$

Таким образом в пучке окружностей, имеющих общий линейный элемент (точка и проходящая через нее прямая), каждые две окружности пучка имеют циссоиду в отношении центра пучка третьей окружности того же пучка.

2. ЦИССОИДА ГИПЕРБОЛЫ

Аналогичная задача может быть поставлена и для гиперболы и ее круга кривизны в вершине.

Возьмем уравнение гиперболы в параметрической форме:

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t.$$

Отсюда

$$x' = a \operatorname{sh} t, \quad y' = b \operatorname{ch} t,$$

$$x'' = a \operatorname{ch} t, \quad y'' = b \operatorname{sh} t,$$

и, следовательно,

$$x'y'' - y'x'' = -ab,$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t.$$

Таким образом уравнение эволюты гиперболы в параметрической форме запишется:

$$X = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{ch} t \frac{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}{ab} = \operatorname{ch}^3 t \frac{a^2 + b^2}{a},$$

$$Y = b \operatorname{sh} t - a \operatorname{ch} t \frac{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}{ab} = -\operatorname{sh}^3 t \frac{a^2 + b^2}{a}.$$

При $t=0$

$$X_e = \frac{a^2 + b^2}{a}, \quad Y_e = 0.$$

Итак, в исходных координатах уравнение круга кривизны:

$$\left(X - \frac{a^2 + b^2}{a}\right)^2 - Y^2 = \frac{b^4}{a^3} = p^2,$$

а после переноса начала в вершину правой ветви кривой:

$$(X' - p)^2 + Y'^2 = p^2,$$

или

$$X'^2 + Y'^2 = 2pX'$$

и стало быть в полярных координатах с полюсом в вершине гиперболы:

$$r = 2p \cos \theta.$$

Уравнение последней в тех же координатах будет:

$$\frac{X'^2}{a^2} - \frac{Y'^2}{b^2} = -2pX'$$

и

$$r = \frac{2p \cos \theta}{a \sin^2 \theta - p \cos^2 \theta}.$$

Таким образом искомая кривая имеет уравнение:

$$r = \frac{2p(a+p) \cos^3 \theta}{a \sin^2 \theta - p \cos^2 \theta},$$

или, если перейти к прямоугольным координатам:

$$(x^2 + y^2)(ay^2 - px^2) - 2p(a+p)x^3 = 0,$$

или, еще иначе,

$$F - (x^2 + y^2) \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) - 2 \frac{c^2 x^3}{a} = 0.$$

Здесь $(F'_{x^3})_{x=0} = -12p(a+p)$; остальные производные третьего порядка в точке $(0, 0)$ обращаются все в нуль; уравнение совокупности касательных вначале

$$-12p(a+p)x^3 = 0.$$

Начало координат (вершина гиперболы) и здесь тройная точка с тремя совпавшими касательными (Spitzpunkt).

При $x = -\frac{8pa}{a+p}$ уравнение принимает вид:

$$\left(ay^2 - \frac{64p^3 a^2}{(a+p)^2} \right) \left(y^2 + \frac{64p^2 a^2}{(a+p)^2} \right) + \frac{16 \cdot 64p^4 a^3}{(a+p)} = 0,$$

что по сокращении на a приводится к точному квадрату

$$\left[y^2 + \frac{32p^2 a(a-p)}{(a+p)^2} \right]^2 = 0,$$

т. е. уравнение имеет два мнимых сопряженных двойных корня при $a - p > 0$, и прямая $x = -\frac{8ap}{a+p}$ является уединенною (двойной) касательной, — и два вещественных, если $a - p < 0$, т. е. $a^2 < b^2$.

Корни равны, если $a = p$, т. е. $a = b$, т. е. гипербола равносторонняя.

Циссоида равносторонней гиперболы будет иметь уравнение:

$$y^4 - x^4 - 4ax^3 = 0.$$

Асимптотами кривой служат прямые:

$$y = \pm \frac{b}{a} (x + a),$$

асимптоты направляющей гиперболы, т. е. кривая асимптотически приближается к направляющей гиперболе.

Точки перегиба: вычисляя гессиеву и отбросив решение $x = 0$, соответствующее тройной точке, имеем:

$$-112p^2(a+p)[6ay^2 + (a-p)x^2] = 0.$$

Две точки перегиба мнимые при $a > b$ и вещественные при $a < b$.

Плюккерovy характеристики:

$$m=4, \quad n=4, \quad r=2, \quad d=1, \quad \varrho=2, \quad \delta=1, \quad p=0.$$

УПРОЩЕННЫЙ СПОСОБ ГРАФИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ

А. А. Мочульский (Москва)

1. Среди различных методов приближенного определения коэффициентов ряда Фурье графический метод Роте (Rothe)¹⁾ отличается значительной простотой и позволяет быстро и без вычислений найти амплитуду и фазу любой гармоники заданной функции. Некоторое неудобство метода состоит в усложнении графической работы при большом числе делений промежутка интеграции. Кроме того, при построении нельзя заранее указать размеры чертежа; ввиду этого последний может выйти из границ бумаги.

В настоящей заметке указывается прием построения, упрощающий и систематизирующий графическую работу и притом так, что вся она протекает в первоначально заданных границах чертежа.

2. Напомним сущность метода Роте.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π разлагается в ряд Фурье, т. е.:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots = \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \end{aligned} \quad (1)$$

Постоянные a_0 , a_k и b_k называются коэффициентами ряда.

¹⁾ См. Круг, Основы электротехники, т. II.

Это же разложение можно представить в несколько ином виде:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx - \varphi_k). \quad (1')$$

Здесь A_k и φ_k — амплитуда и фаза k -й гармоники. Они связаны с коэффициентами ряда следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_k &= A_k \cos \varphi_k; & A_k^2 &= a_k^2 + b_k^2; \\ b_k &= A_k \sin \varphi_k; & \varphi_k &= \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}. \end{aligned}$$

Как известно, при очень широких предположениях относительно функции $f(x)$ ¹⁾ ряд (1) сходится, и коэффициенты его изображаются определенными интегралами:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для приближенного определения a_k и b_k Роте пользуется геометрическим представлением комплексного числа. Именно, умножая b_k на $i = \sqrt{-1}$ и складывая результат с a_k , он получает комплексное число

$$A_k = a_k + ib_k, \quad (3)$$

модуль и аргумент которого суть A_k и φ_k . Это число можно рассматривать как вектор на плоскости координат, исходящий из начала, с координатами a_k и b_k .

Подставляя в (3) значения коэффициентов из (2) и применяя формулу Эйлера, получим:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) (\cos k\xi + i \sin k\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{ik\xi} d\xi. \quad (3')$$

Приближенно интеграл можно заменить соответствующей суммой. Поэтому

$$A_k \approx \frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^n f(\xi_v) e^{ik\xi_v} \Delta\xi_v. \quad (3'')$$

Здесь n — число дроблений промежутка $0, \dots, 2\pi$, и \approx есть знак приближенного равенства.

Если взять длины всех маленьких промежутков одинаковыми, то тогда

$$\Delta\xi_v = \delta = \frac{2\pi}{n} \quad \text{и} \quad \xi_v = \delta(v-1).$$

¹⁾ Если $f(x)$ — периодическая и кусочно-монотонная функция, т. е. если период ее можно разбить на конечное число частей, внутри каждой из которых $f(x)$ монотонна.

Подставляя эти значения в (3''), получим окончательно:

$$\begin{aligned} A_k &\approx \frac{2}{n} \sum_{v=1}^n f[\delta(v-1)] e^{ik\delta(v-1)} = \\ &= \frac{2}{n} [f(0) + f(\delta)e^{ik\delta} + f(2\delta)e^{ik2\delta} + \dots + f((n-1)\delta)e^{ik(n-1)\delta}]. \quad (3''') \end{aligned}$$

Таким образом построение вектора A_k приводится к геометрическому сложению n векторов, модули которых равны:

$$I = f(0), \quad II = f(\delta), \quad III = f(2\delta), \dots, \quad n = f(n-1)\delta,$$

и аргументы соответственно равны:

$$0, \quad k\delta, \quad 2k\delta, \dots, (n-1)k\delta.$$

Полученную сумму нужно затем разделить на $\frac{n}{2}$.

3. Построение обычно осуществляется следующим образом.

Пусть задан график периодической функции и требуется определить ее первую, вторую и вообще k -ю гармонику.

Выбираем n , число разбиений промежутка, и по графику функции или вычислением определяем ординаты, соответствующие каждому малому промежутку. Из произвольной точки плоскости проводим n лучей, составляющих между собою угол $\delta = \frac{2\pi}{n}$. Пусть номера этих лучей $1, 2, 3, \dots, n$. На каждом

из них откладываем ординату функции того же номера, что и луч (для получения первой гармоники). Условно эту операцию запишем так:

$$I_1, \quad II_2, \quad III_3, \dots, \quad \bar{n}_n.$$

Для второй гармоники откладываем ординаты, пропуская один луч, т. е.

$$I_1, \quad II_3, \quad III_5, \dots, \quad \bar{n}_{n-1};$$

для третьей гармоники следует откладывать через два луча, т. е.

$$I_1, \quad II_4, \quad III_7, \dots, \quad \bar{n}_{n-2},$$

и вообще для k -й гармоники операция такова:

$$I_1, \quad II_{k+1}, \quad III_{2k+1}, \dots, \quad \bar{n}_{n-k+1}.$$

Затем складываем построенные так векторы по правилу многоугольника. Замыкающая его есть $\frac{n}{2} A_k$. Разделив сумму на $\frac{n}{2}$, получим вектор, модуль и аргумент которого дадут амплитуду и фазу k -й гармоники. Проекция его на горизонтальное и вертикальное направления дадут коэффициенты a_k и b_k .

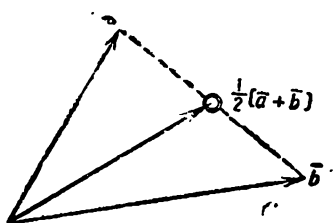
4. При помощи следующих простых соображений графическую работу сложения векторов можно значительно упростить и провести ее, не выходя из первоначально заданных границ чертежа.

Малая загруженность чертежа позволяет одну и ту же диаграмму использовать для определения нескольких гармоник.

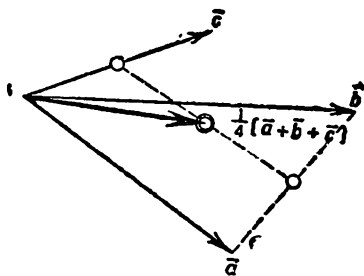
Пусть имеем два вектора с общим началом. Середина отрезка, соединяющего их концы, есть конец полусуммы векторов (фиг. 1).

При трех векторах a , b , c середина отрезка \overline{ab} есть конец вектора $\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$. Середина отрезка между этой точкой и серединой вектора \overline{c} есть конец вектора $\frac{1}{4}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$.

При четырех векторах можно получить тем же путем сначала полусуммы двух пар векторов, а затем полусумму этих полусумм т. е. сумму всех четырех векторов, деленную на четыре (фиг. 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Наконец, при сложении n векторов, разбиваемых на пары, находим полусуммы пар, затем полусуммы этих полусумм и т. д. Если же при этом остаются непарные векторы, то берем середины последних, как в случае сложения трех векторов.

5. Построим диаграмму этим способом (для графика фиг. 3).

Число n удобно взять равным целой степени двух, так как в этом случае мы до конца построения будем получать пары складываемых. Пусть $n = 2^m$ (на чертеже $n = 16$).

На одной и той же диаграмме можно определить несколько гармоник. С этой целью ординаты функции не откладываем на лучах, а проводим ряд концентрических окружностей с радиусами, равными ординатам (см. фиг. 4 и 5).

Для определения k -й гармоники отмечаем на диаграмме точки:

$$I_1, II_{k+1}, III_{2k+1}, \dots, \overline{n-1}_{n-2k+1}, \overline{n}_{n-k+1}.$$

Складывая их попарно, находим точки полусумм (отмечены кружками):

$$\frac{1}{2}(I_1 + II_{k+1}), \frac{1}{2}(III_{2k+1} + IV_{3k+1}), \dots, \frac{1}{2}(\overline{n-1}_{n-2k+1} + \overline{n}_{n-k+1}).$$

Складывая эти точки, находим точки следующего порядка:

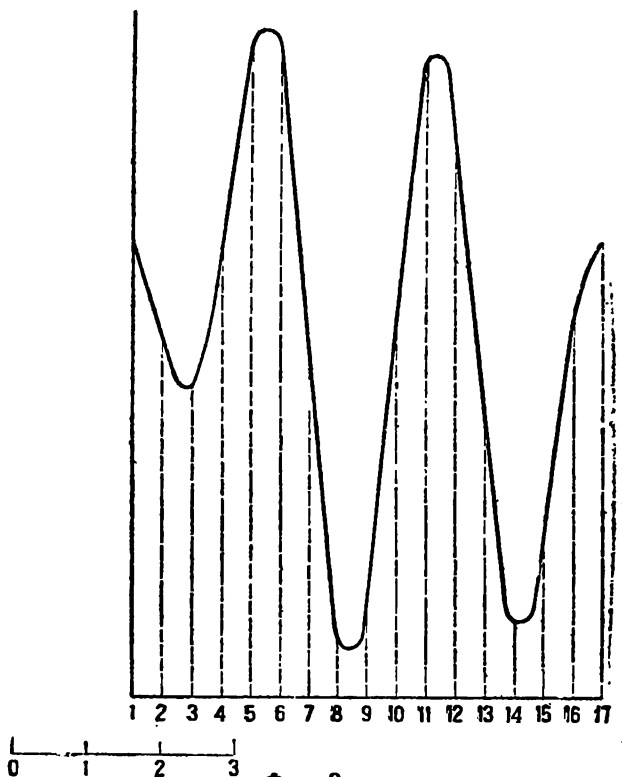
$$\frac{1}{4}(I_1 + II_{k+1} + III_{2k+1} + IV_{3k+1}), \dots$$

и т. д. вплоть до получения двух точек. Если $n=2^m$, то эти операции будут произведены $m-1$ раз. Наконец, последняя операция дает точку:

$$\frac{1}{2^m} (I_1 + II_{k+1} + \dots + n_{n-k+1}).$$

Очевидно, что эта точка есть конец вектора

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_{\nu}) e^{ik\delta(\nu-1)} = \frac{1}{2} A_k.$$

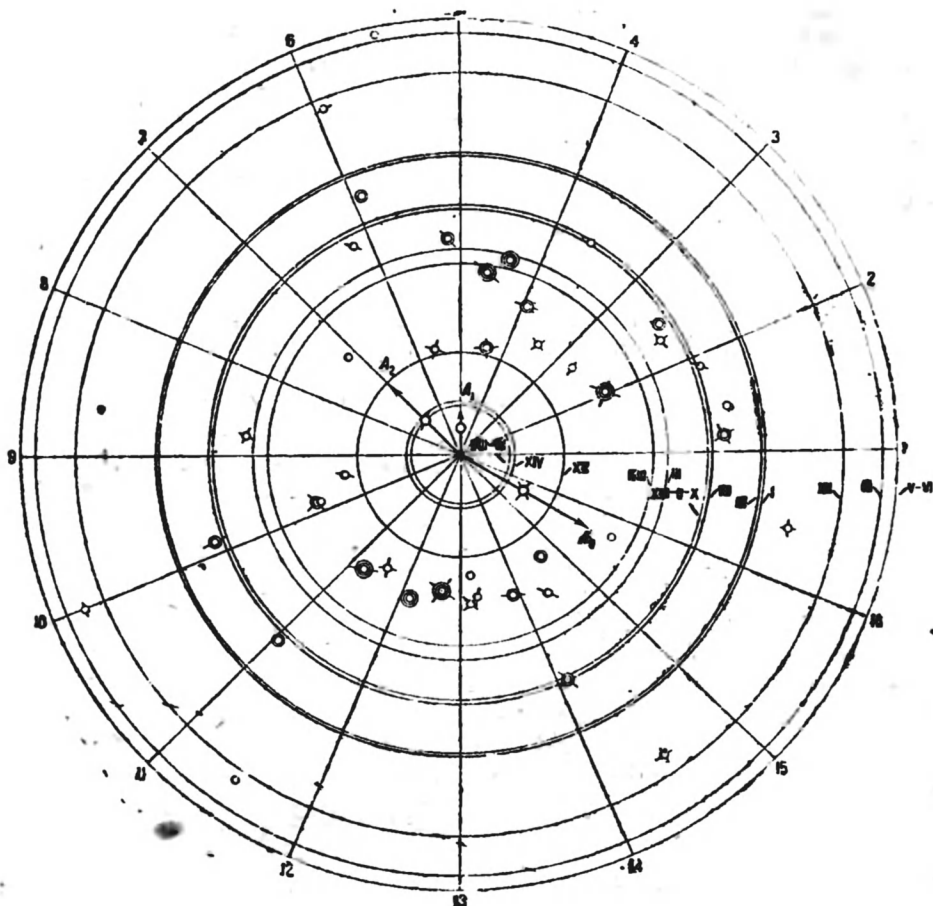


Фиг. 3.

Удвоив его, получим A_k . Длина этого вектора дает амплитуду, а аргумент — фазу k -й гармоники. Проекция его на горизонталь и вертикаль дадут величины коэффициентов a_k и b_k .

Графическая работа существенно упрощается, если построение вести на бумаге с предварительно нанесенной полярной сеткой и если пользоваться миллиметровой линейкой; тогда деление отрезка пополам производится с помощью арифметического отсчета.

Кроме того, нет надобности в соединении получаемых отрезков прямыми линиями. Достаточно ограничиваться определением точек — концов отрезков (см. фиг. 5).



Фиг. 5. Построение на одной диаграмме трех последовательных составляющих для графика фиг. 3.

6. Сравним простоту нашего метода с обычным построением.

Будем предполагать в обоих случаях, что:

а) уже имеется построенным пучок векторов слагаемых с известными длинами;

б) вектор будем считать построенным, если известны его начало и конец (соединения этих точек прямой не учитываем);

в) деления отрезка совершаются с помощью отсчета на миллиметровой линейке, причем арифметическую работу не будем учитывать, а геометрическая сведется к совмещению линейки с двумя точками так, что нуль линейки придется против одной из точек, и к отметке новой точки;

г) параллельные прямые проводятся с помощью двусторонней параллельной линейки.

Лемуан следующим образом определяет коэффициент простоты построения¹⁾. Он рассматривает следующие операции:

1) Прикладывание линейки к данной точке. Эта операция обозначается символом R_1 . Прикладывание линейки к двум точкам имеет символом $2R_1$.

2) Помещение ножки циркуля в данную точку — символ C_1 . Измерение отрезка циркулем, очевидно, имеет символом $2C_1$.

3) Проведение прямой или отметка точки — символ R_2 .

В соответствии с этим параллельный перенос вектора в определенную точку имеет символом $3R_1 + R_2$, так как состоит в проведении параллельной через данную точку (прикладывание одной стороны двусторонней линейки к двум точкам и совмещение другой стороны линейки с третьей точкой — $3R_1$) и отметки длины вектора по шкале (на той же линейке, символ R_2).

Операция деления отрезка имеет символ $2R_1 + R_2$ (прикладывание шкалы к двум точкам и отметка новой точки).

Допущение Лемуана состоит в том, что операции R_1 , R_2 , C_1 и C_2 считаются элементарными с коэффициентом простоты, равным единице. Пусть какое-либо построение имеет символ

$$mR_1 + nR_2 + kC_1,$$

где m , n , k — целые числа — обозначают число прикладываний линейки к точке, число отметок точек или проведенных прямых, число помещений ножки циркуля в точку. Тогда коэффициентом простоты по Лемуану называется сумма этих операций, т. е.

$$S = m + n + k.$$

7. Применим эти определения к нашим построениям.

При обычном способе определения гармоник нужно сложить n векторов и сумму разделить на $\frac{n}{2}$. Символ этой операции есть

$$n(3R_1 + R_2) + 2R_1 + R_2 = (3n + 2)R_1 + (n + 1)R_2$$

и коэффициент простоты

$$S = 4n + 3.$$

При упрощенном способе суммирования, считая $n = 2^m$, нужно в первый раз суммировать 2^{m-1} пары, во второй раз 2^{m-2} пары, и т. д. до одной пары, а всего

$$2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 1 = 2^m - 1 = n - 1$$

пару. Этот результат нужно удвоить. Символ операции равен:

$$(n - 1)(2R_1 + R_2) + 2R_1 + R_2 = n(2R_1 + R_2),$$

$$S' = 3n,$$

и коэффициент простоты

т. е. второй способ графически проще по меньшей мере на 25%.

¹⁾ E. Lemoine, Géométrie graphique ou art de constructions géométriques, Paris, Scientia, № 18.

См. также Адлер, Теория геометрических построений, стр. 259 и сл., Одесса, Mathesis, 1924.

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА В ШКОЛЕ

Д. Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону)

1. В методической литературе очень много писали против строгой формально-логической геометрии в школе. И, конечно, нет сомнения, как бы ни были интересны итальянские учебники¹⁾, они не годятся для лиц юношеского возраста. Но не следует перегибать и в другую сторону. Такой перегиб имеется у Бореля²⁾. Его учебник насыщен идеями, но он, внося слишком много интуиции, уже перестает быть школой логического мышления. Между тем лучшей такой школой является именно геометрия. Человек, прошедший через изучение геометрических доказательств, даже если он уже успел забыть геометрию, всегда будет лучше мыслить, чем тот, который ее совсем не видел.

Но прибавлю еще следующее: геометрия является школой не только логического мышления, но и школой логики. Нет сомнения, что для того, чтобы вполне усвоить геометрию, следует знать и логику. Я не буду сейчас исследовать какую. Одно только ясно: такую, которая имеет дело с теми общими схемами определений и выводов, которыми пользуется математика.

Такое явление, которое мне пришлось наблюдать, когда из 60 слушателей ни один не знал, что такое силлогизм,—явление уже совершенно ненормальное.

В пединституте мною одно время читался курс: элементарная математика с точки зрения высшей. Но такая высшая точка зрения совершенно невозможна при незнании логики, так как она, конечно, требует и более глубокого аксиоматического изучения, предполагающего знание терминологии и общих понятий классической логики, на которой выросла аксиоматика. Я сейчас не намерен ни защищать аксиоматическое направление в науке, ни строить программу логики в чисто формальном, психологическом или каком-либо другом направлении. Для меня ясно только то, что учащийся физкультуре может, пожалуй, и не знать анатомии, но хороший учитель физкультуры ее должен знать, хотя бы

¹⁾ Итальянские учебники: A. Sannio ed E. d'Ovidio, *Elementi di Geometria*, Napoli 1916; G. Veronese, *Elementi di Geometria*, Padova 1911; также Enriques ed Amaldi, Ingrams, Paolis etc.

²⁾ Борель-Штекель, *Элементарная математика*, изд. „Матезис“.

в общих чертах. То же, конечно, относится и к учащемуся математике и учителю ее. Последний во всяком случае должен за геометрическим выводом видеть скелет логического аппарата. В настоящей статье я намерен побеседовать о некоторых пунктах методики математики (преимущественно геометрии), имеющих значение в этом отношении.

СУЖДЕНИЯ

2. Прежде всего я отмечаю школьную проблему об определениях¹⁾. Она имеет гораздо большее значение в школе, чем это может показаться, если встать на точку зрения научного исследователя. В следующей статье я предполагаю рассмотреть вопрос о некоторых новых геометрических определениях. Сейчас же ограничусь только задачей об общем характере школьного определения.

Взгляд на всякое математическое определение, как на определение номинальное, т. е. на соглашение, выясняющее точный смысл некоторого слова, выражения или символа, какой мы ему приписываем, совершенно неправилен, поскольку речь идет о школьном определении²⁾.

С этой точки зрения определение не имеет никакого воспитательного значения, оно только необходимый балласт для памяти и больше ничего. Наряду с определениями номинальными следует признать и генетические, отнюдь к ним не сводимые, и учащийся должен осознать эту несводимость.

Что такое, например, окружность?

Геометрическое место точек, отстоящих на одно и то же расстояние от некоторой точки.

В номинальном определении мы означаем некоторым термином совокупность свойств, которые присущи объектам некоторого класса, означая термином (прилагательным) вид, охарактеризованный этими свойствами. Треугольник, имеющий равные стороны,—равносторонний. Это, конечно, номинальное определение³⁾.

Но приведенное выше определение окружности иного рода. Окружность, конечно, не есть совокупность точек, обладающих указанным выше свойством. Тут нет только одного выделения вида множества точек. Здесь круг определяется, как носитель некоторой бесконечной совокупности точек, т. е. пунктуала.

¹⁾ См. Bonnet, *Essai sur les définitions géométriques*, 1870. Liard, *Des définitions géométriques et de définitions empiriques*, Paris 1883.

Богатый материал в прекрасной книге Schotten, *Inhalt und Methoden des planimetrischen Unterrichts*, 1870.

²⁾ О номинальных и генетических определениях см. знаменитую попповскую логику, принадлежащую Арно и Николю,—*L'art de penser*, Paris 1684.

³⁾ Об определении см. Petri, *Rami Geometri Basilieae Scholarum Mathem. libri unus et triginta*. Аристотелевские взгляды см. Aristoteles, *Anal. Post.*, lib. 1, стр. 13. См. также (Friedlein) Procli *Diadochi*, In *Primum librum Euclidis elementorum Commentarium*, Leipzig 1873.

Но что такое носитель, в каком взаимоотношении находятся кривая и пунктуал, который несет кривая, — это уже не дается определением. В этом определении, как и в других генетических определениях, содержится интуитивный скачок от производителя (точки) к носителю (кривой).

Но мы, конечно, не нарушим правильности наших логических заключений, отождествив окружность и прямую с пунктуалами, которые они несут.

Верно и то, что пунктуал второго порядка (в частности, окружность) и прямая имеют не более двух общих точек, верно и то, что круг и прямая пересекаются в двух точках; но все же это — по существу два различные положения, хотя и эквивалентные, т. е. друг из друга вытекающие на основании того, что пунктуал определяет круг и, наоборот, круг определяется пунктуалом.

Из того, что о системе объектов:

$$A, B, C, D, \dots,$$

мы говорим то же, что о системе:

$$A', B', C', D', \dots,$$

вовсе не следует тождественность этих систем объектов, ибо в них может быть нечто, о чем мы именно не говорим, а иногда даже ничего и не можем сказать так, как от нас это требуется, т. е. в логических терминах.

Если мы заинтересованы только в том, чтобы высказать в определенных терминах ряд теорем, то мы можем бесцеремонно подставлять вместо A, B, C, D, \dots , соответственно A', B', C', D', \dots , т. е. подставлять вместо определенных объектов то, что можно назвать их логическими эквивалентами.

В этом случае мы можем определять с помощью постулатов или, вернее, совсем уничтожить определения и ограничиваться лишь постулатами, на которые можно взирать, как на условности. Но это — точка зрения формально-гипотетической науки и ей не место в школе.

Учащийся должен знать то, о чем он будет говорить, уметь дать чертеж и передать словами то, что выражает чертеж.

3. В определения строго-логической системы геометрии желательнее внести минимум признаков определяемых объектов, и затем необходимо доказать совместность этих признаков. Но в элементарном курсе такие требования неуместны.

Совместность признаков часто просто подтверждается интуицией данного объекта рассматриваемого типа. Также нет необходимости всегда стремиться к независимости определенных признаков, т. е. к их минимуму¹⁾. Определение должно иметь

¹⁾ О требованиях, предъявляемых логикой к определениям, см. Челпанов, Учебник логики, гл. VI, стр. 31, Москва 1913.

больше всего воспитательное значение. В то время как развертывание доказательств упражняет способность к логическим умозаключениям, определения развивают наблюдательность, способность к расчленению необходимого материала и умение выражать результаты анализа на словах.

В определения элементарного курса геометрии не только могут, но и должны входить логически не действующие признаки.

Более того, с педагогической точки зрения лучше всего постепенно доводить учащегося до такого определения, которое бы содержало не только те признаки, по которым определенные объекты распознаются в донаучном мышлении и которые вместе с тем логически недостаточны, но и другие, уже приводящие логический аппарат в движение, и путем примеров, говорящих интуиции, вызвать их в сознании учащегося.

Например, идею или даже просто „чувство“ подобия мы имели еще раньше, чем приступили к изучению геометрии.

Мы можем формулировать определение подобия так, что не пойдем в разрез с этим чувством: „Две фигуры подобны, если они имеют одну и ту же форму, но различные размеры“.

Но такое определение не приведет в движение логический аппарат, если не присоединить сюда в форме аксиомы (как это делает Вольф) аксиому, относящуюся к таким фигурам, обычно у нас превращаемую в определение (равенство углов)¹⁾.

4. Независимо от того, возможно ли, как это утверждают, чисто логические определения геометрических объектов и извлечения из них всего содержания геометрии, в полунинтуитивной школьной геометрии должны существовать суждения, приносящие нечто, не содержащееся в самих определениях.

Такие суждения названы Кантом²⁾ синтетическими в противоположность аналитическим, не дающим ничего сверх того, что содержится уже в определении. Последние только расчленяют то, что образует исследуемый объект, в то время как первые присоединяют к признакам, определяющим объект, нечто новое, расширяющее наше знание о нем.

Учитель, конечно, всегда должен уметь различить синтетическое определение от аналитического, суметь распознать как то, что входило в определение, так и то, что получено путем рассуждений или обращением к интуиции.

Спросите ученика: доказывается ли, что квадрат имеет прямой угол.

Он должен ответить: нет, так как квадрат определяется, как вид прямоугольника, а именно прямоугольника с равными сторонами, а прямоугольник определяется, как параллелограмм с прямыми углами. Это — суждение, конечно, аналитическое.

¹⁾ Теория подобия Вольфа: Wolf, Compendium elem. Mathesos. Venetis 1713. См. Мордухай-Болтовской, Теория подобия Христиана Вольфа и постулат де-Левека, Журнал опытной физики и элементарной математики, 1916.

²⁾ Кант, Критика чистого разума, эстетика, перевод Лосского.

Разность между двумя следующими друг за другом членами арифметической прогрессии постоянна. Это, — конечно, тоже суждение аналитическое.

Но вот суждение синтетическое: диагонали прямоугольника равны. Это свойство не заключается в определении прямоугольника. Фрейер ¹⁾ отождествляет аналитическое суждение с категорическим, а синтетическое с гипотетическим. Тогда все данные новые положения следует признать гипотетическими.

Если A есть B , то C есть D .

Если параллелограм — прямоугольник (т. е. если один из его углов прямой), то диагонали равны.

Но с этим нельзя согласиться. Это можно было бы утверждать только в том случае, если бы вопрос о том, может ли иметь параллелограм прямые углы, оставался бы открытым.

Но союз „если“ здесь употребляется в ином смысле, чем тот, который требуется синтетическим суждением, а именно, в смысле определения вида подлежащего с помощью рода и специфической разности.

Гипотетические же суждения в собственном смысле состоят не в формулировке теорем, а в промежуточных ступенях ее доказательства. Доказывается, например, равенство двух треугольников при трех равных сторонах.

„Если при наложении треугольника $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC A_1 упадет вне треугольника ABC , то произойдет „то-то“. Вот это типичное гипотетическое суждение. Пока неизвестно, может ли A_1 попасть вне треугольника ABC . Только последующий ход рассуждений убеждает в том, что это невозможно так же, как и то, что A_1 окажется внутри — в результате точка A_1 должна оказаться на треугольнике ABC в точке A .

5. Разделительное суждение. Суждение вида:

A есть или B , или C , или D ,

тоже чаще является в доказательстве, чем в формулировке.

Пример теоремы с таким суждением: два трехгранных угла с равными плоскими углами или симметричны или равны (лучше сказать конгруэнтны).

В элементарной математике обычно имеют место трихотомные разделительные определения.

Например:

1) Окружность или пересекает прямую, или касается ее, или не имеет с ней общей точки.

2) Радиальная ось есть или общая хорда двух кругов, или общая их касательная, или, наконец, лежит вне кругов и требует особого построения.

3) Тангенс острого угла или меньше, или равен, или больше единицы.

¹⁾ Freier, Beispiele zur Logik aus der Mathematik und Physik, Berlin 1889.

4) Квадратное уравнение имеет или два комплексных корня, или два равных вещественных, или два различных вещественных. Такие разделительные суждения имеют очень большое воспитательное значение.

Они воспитывают в ученике способность к рефлексии и к анализу. Они учат внимательности, учат тому, чтобы не пропускаться ни одна из возможностей.

Преподаватель глубоко ошибается, думая, что прежде всего он должен воспитать быстроту соображения. Быстрота эта имеет меньшее значение, чем точность и осторожность мышления. Лучше мыслить медленно и верно, чем скоро и ошибочно. Над чрезмерным увлечением умственным счетом методисту следует призадуматься.

6. Деление суждений на категорические, условные и разделительные совершается по отношению между подлежащим и сказуемым (субъектом и предикатом).

Но есть еще деление суждений по качеству и количеству на общеутвердительные и частноутвердительные, общеотрицательные и частноотрицательные.

Отрицательное суждение обычно встречается тоже только как промежуточное в ходе доказательств. Но чем больше математика удаляется от естествознания, для которого она является лишь вспомогательной наукой, и приближается к сфере чисто математических идей, так сказать, самих себе довлеющих, тем большую ценность получает отрицательное суждение.

Для техника всегда необходим положительный результат: для него, например, важно построить с помощью циркуля и линейки проходящую через точку M прямую MB с отрезком AB между двумя пересекающимися прямыми PA и PB , равным данному.

Но математика вскрывает, что в самом требовании задачи заключено противоречие, что такая задача не может быть решена с помощью только циркуля и линейки ¹⁾, что для этого необходим еще другой инструмент (например, вычерчивающий конхойду).

Построение порой очень сложных доказательств невозможности техники всегда будет представляться напрасной затратой энергии. Но учащийся не должен пройти совершенно мимо таких суждений.

Квадратура круга ²⁾ и трисекция угла будут всегда интересов лучших учеников. Молодой ум будет колебаться между неверием в силу разума и верой в его бесконечную мощь. Следует удержать его от крайностей, следует указать на существование неразрешимых проблем.

¹⁾ Klein *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire*, 1896.

²⁾ «О квадратуре круга», изд. ГТИ, 1934. Beutel, *Die Quadratur des Kreises*, Leipzig 1920. Montucl, *Histoire des recherches sur les quadratures*, 1754.

В элементарной геометрии теорем отрицательного характера очень мало по причине сложности тех логических операций, с помощью которых они устанавливаются.

Стереометрическая теорема: „не существует более пяти правильных тел“, очень важная и интересная, далеко не всегда служит предметом изучения в средней школе. Между тем здесь налицо та форма отрицательного положения, которая может иметь наибольшее положительное значение, а именно — точно устанавливается число решений поставленной проблемы. Находится и решение и добавочно доказывается, что других быть не может.

7. Обучение должно идти на „да“ и на „нет“, но только едва ли можно признать рациональной следующую постановку обучения с помощью отрицательных суждений со стороны ученика. Ученику предлагается задача-ловушка с кроющимся в задаче противоречием. Он сам должен найти и понять, что учитель его дурачит. По своей природе человеческий ум, а в особенности ум ребенка, очень доверчив, он меньше всего имеет склонность отнести критически к самому заданию. Он всегда верит, что не только та задача, которую предлагает ему учитель, но даже и та, которую он сам себе ставит, допускает решение.

Поэтому учителю лучше вопрос ставить так: допускает ли данная задача решение, или нет, и в том случае, если допускает, найти решение.

Так: можно ли через точку пересечения двух кругов C_1 и C_2 провести касательную к третьему кругу C и, если можно, то провести ее.

Вопросник, с помощью которого велись бы повторения не доказательств, но основных результатов геометрии, должен содержать и вопросы, на которые должны быть даны отрицательные ответы, и ученик должен последние мотивировать.

Может ли в прямоугольном треугольнике медиана, опущенная на гипотенузу, совпасть с высотой? Отв.: Может.

В каком случае? Отв.: Когда в прямоугольном треугольнике катеты равны.

Может ли в прямоугольном треугольнике медиана, опущенная на катет, совпасть с высотой? Отв.: Нет, ибо она совпала бы с катетом, т. е. с одной из сторон, которая, конечно, не может быть медианой.

Может ли эта медиана совпасть с биссектрисой? Отв.: Нет, так как в силу теоремы относительно отсекаемых на стороне отрезков, это предполагало бы равенство катета и гипотенузы.

Может ли куб пересекаться плоскостью по шестиугольнику? Отв. Да.

А по восьмиугольнику? Отв.: Нет, ибо это предполагало бы у куба не шесть, а восемь граней.

Только один математик-методист старого времени Сюзанн¹⁾ обратил внимание на „отрицательные упражнения“, которые на мой взгляд могут иметь методическое значение, воспитывая спорность в нахождении ошибок как в ходе логических рассуждений, так и в вычислениях.

8. Частноутвердительное суждение. Частноутвердительное суждение „некоторые S суть P “ и частноотрицательное „некоторые S не суть P “ — относятся к низшей ступени эволюции математической мысли.

Предположением „некоторые S суть P “ вызывается вопрос: какие же S суть P ; оно требует общеутвердительного суждения „все S_1 суть P “, где S_1 есть вид, входящий в род S .

Доказать, что некоторые S суть P математика может, только доказав, что все S_1 суть P , так что в логически отделанной системе частноутвердительное и частноотрицательное суждения являются только после общеутвердительных A и общеотрицательных E . Поэтому в окончательной научной обработке частноутвердительное и частноотрицательное суждения не имеют значения.

Но они имеют значение на тех ступенях математического мышления, когда положения еще не доказаны, но подозреваются.

Так можно подозревать, что некоторые, но неизвестно точно какие, задачи на построение не разрешимы с помощью циркуля и линейки, и сделать отсюда заключение, что не все уравнения разрешимы в квадратных радикалах.

В силу этого частноутвердительные и частноотрицательные суждения имеют и методическое значение.

При обучении алгебре необходимо привести ученика к мысли, что не все задачи разрешаются с помощью системы уравнений первой степени, что не всегда системы уравнений являются совместными, что в некоторых случаях одно является следствием других или им противоречит и т. д.

Различные „методы“ решения задач элементарной геометрии, в особенности задач на построение, никогда не бьют наверняка, т. е. не всегда имеют успех и, таким образом, рекомендуя их, приходится высказать только частноутвердительное суждение о том, что в некоторых случаях следует ожидать успеха.

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ

9. Переходя от суждения к умозаключению, мы прежде всего должны поставить вопрос о методическом и научном значении индукции и дедукции в математике.

Индукция²⁾, т. е. заключение от частного к общему, будет иметь различное методическое значение, смотря потому, будет ли

¹⁾ Suzanne, De la manière d'étudier les mathématiques, Paris 1810.

²⁾ Милль, Система логики, перевод Ивановского.

это неполная индукция, т. е. распространение некоторого признака на весь класс, когда он наблюдается только у части индивидуумов, или же полная, т. е. подобное же заключение по установлению этого факта для всех индивидуумов. Следует помнить, что математика наука дедуктивная, она заключает не от частного к общему, а наоборот, от общего к частному, но сам математик, как всякий мыслитель, в своей закулисной работе пользуется индукцией, строя на основании ряда фактов возможную гипотезу, которая затем проверяется уже дедуктивными приемами, т. е. попытками вывести из нее положение уже от общего к частному. При этом, конечно, употребляется неполная индукция. Берутся отдельные случаи, а не вся совокупность, которую математик не может охватить.

Предположим, что математик занимается разложением целых чисел на сумму квадратов. Для целого ряда, но, конечно, не для всех целых чисел он убеждается в разложимости на четыре квадрата. Он делает заключение по индукции, что каждое число разлагается на сумму четырех квадратов. Если бы число рассмотренных чисел было бы 10 тысяч, то, встав на точку зрения естествоиспытателя, можно было бы принять разложимость всякого числа на четыре квадрата, как факт, установленный громадным числом наблюдений. Но математик, начав, как естествоиспытатель, должен кончить уже, как математик, и отыскать дедуктивное доказательство своего положения.

В научном мемуаре ученый в праве скрыть свою индуктивную закулисную работу, но при обучении она должна быть на виду больше, чем это обычно делается.

Математическое образование имеет своей целью развить математическое мышление, но в последнее как элемент должна входить и индукция, и она должна также развиваться рядом упражнений. Неточная индукция таким образом имеет в математике не логическое, а эвристическое значение, а в силу этого и методическое.

Но я должен здесь удержаться от того увлечения психологизмом ученических работ, которое наблюдалось у преподавателей приблизительно около начала последней войны. Так называемый „анализ“ решения содержал объяснение ученика, почему он выбирает тот или другой путь решения предложенной задачи и, конечно, давал не логическую, а психологическую мотивировку. Такой психологический самоанализ определенным образом вредил работе. Ученик совершенно терял границу между логикой и психологией, и его психологическая мотивировка постепенно заменяла логическое доказательство. Конечно, в эту психологическую часть решения входила и неполная индукция, но в форме беспорядочной, не как строго систематизированный метод естествоиспытателя.

10. Полная индукция для конечного класса, вывод наличия какого-либо признака для всех индивидуумов или вывод свойства

класса по доказательству наличия признака для каждого из индивидуумов, с научной точки зрения представляет экономию мысли, но в редких случаях является необходимой, пожалуй, только в тех случаях, когда для каждого индивидуума или вида приходится строить особое доказательство. Большей же частью в математике выбираются доказательства, охватывающие все случаи и относящиеся не к индивидууму, а к классу, и, таким образом, несколько доказательств соединяются в одно.

С методической же точки зрения в целях избежания слишком общих понятий, труднее усваиваемых, чем им соподчиненные, лучше идти от частного к общему. И обычно так и поступают.

Обобщенную пифагорову теорему можно было бы доказать сразу для общего случая, введя понятие о знаке отрезка. Но лучше, конечно, рассматривать каждый случай в отдельности и для каждого случая (прямоугольного, тупоугольного и остроугольного треугольника) выводить свою формулу и уже затем, познакомив со знаком отрезка, объединить их одной формулой или же поступить, как в тригонометрии, придать этим теоремам тригонометрическую форму, что обычно и делается.

11. Когда класс бесконечен, т. е. содержит бесконечное число индивидуумов, то перечислить их уже невозможно.

В этом случае в современной математике употребляется следующий логический прием, совершенно чуждый античной мысли. Теорема доказывается для одного или вообще конечного числа индивидуумов.

Положим, что каждому индивидууму отвечает значение, принадлежащее к области

$$\Omega(a, b, c, \dots).$$

Если мы докажем, что

1) теорема верна для $x = a$;

2) если она верна для одного значения x , то она верна и для другого x' , получаемого известным образом из первого значения, или, как будем говорить, получаемого определенным преобразованием;

3) если от одного значения x ко всякому другому можно перейти путем такого преобразования, то мы утверждаем справедливость высказанной теоремы для всякого индивидуума данного класса.

В частном случае мы можем иметь так называемое счетное множество индивидуумов, иначе говоря, индивидуумы могут нумероваться. Тогда мы имеем тот принцип, который называется принципом полной математической индукции¹⁾.

¹⁾ О полной математической индукции, о ранней истории ее наибольшее значение имеют: Gr. Maurolico, *Arithmeticae libri duo*, Ven. 1557, 1577. Jacobi Bernoulli, *Ars conjectandi*, 1713. Opere I, 282—283. Pascal, *Oeuvres*, Paris 1908, т. III, стр. 456. См. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, т. III, стр. 341. Vasssa, *Sur le principe d'induction mathématique*, *Revue de Métaphys.*, стр. 30, 1911.

Тогда индивидуумы располагаются по порядку соответственно целым числам, их характеризующим (их номерам): $n = 1, 2, 3 \dots$

1) Теорема доказывается для $n = 1$.

2) Доказывается, что если она верна для одного значения n , то верна и для значения n на единицу большего. Здесь следует отметить необходимость с методической точки зрения рассмотрения не одного, а нескольких значений, раньше чем перейти ко второму моменту указанной выше операции.

Теорема, конечно, вполне доказана, если ограничиться случаем $n = 1$, но тогда эвристический момент совершенно затусевывается.

Ученик сперва должен быть приведен к положению путем неполной индукции, как естествоиспытатель. Затем он должен осознать, что он математик, и, поняв принцип полной индукции с его точной формулировкой (начиная с $n = 1$), внести необходимый корректив, т. е. доказать, что положение, будучи верно для n , верно и для $n + 1$.

Применение этого принципа мы находим в кестнеровском¹⁾ доказательстве формулы бинома Ньютона.

Формула эта обнаруживается для

$$n = 1, 2, 3$$

с помощью простого умножения

$$a + b = a + b,$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,^1$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

а затем доказывается путем умножения

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n}{1} ab^{n-1} + b^n$$

на $(a + b)$, что если формула верна для n , то она верна и для $n + 1$.

Возвращаясь к высказанной выше наиболее общей форме принципа полной математической индукции, мы можем подвести под нее и доказательство геометрических теорем с помощью преобразования. Элементарная математика скрытым образом оперирует с подобным преобразованием, изучая то, что остается при нем неизменным, т. е. инварианты.

Отметим схему: задано найти x для объекта A , принадлежащего классу Ω .

A преобразуется в другой более простой объект \bar{A} того же класса Ω и для \bar{A} имеется x .

Доказывается, что при этом преобразовании x есть инвариант и таким образом решение x будет решением не только для \bar{A} , но и для A . Эта схема может быть показана ученику, например, в случае нахождения площади параллелограмма путем известного

¹⁾ Kästner, Anal. d. endlichen Grösse, Cm. Freier, стр. 35.

преобразования его в прямоугольник, площадь которого легко находится.

12. В то время как индукция ведет от нескольких индивидуумов ко всему классу, аналогия ведет от одного индивидуума к другому, признанному подобным первому.

А присущи признаки:

$$a, b, c, \dots$$

и для A доказано свойство ω .

У B находим те же признаки: a, b, c, \dots и на основании этого утверждаем, что ему присуще также свойство ω .

Здесь следует отметить тот случай, когда подобное заключение делается без анализа вывода такого свойства ω , которое доказывается на основе свойств A , не присущих уже B . Это будет та аналогия, которой мы и пользуемся в жизни, которой ученик имеет склонность пользоваться и в геометрии и которая вообще с методической точки зрения очень опасна, развивая в учащемся склонность к легкомысленным заключениям не из ряда фактов, а по первому взгляду. Иное дело, когда устанавливается, что ω выводится только из a, b, c, \dots , что признаки, которыми A и B различаются, являются логически не действующими. Осознание логической эквивалентности объектов весьма важный момент при развитии более глубокого понимания геометрии.

Я не буду настаивать на этом глубоком проникновении в предмет для учащегося, но я буду настаивать на том, чтобы в некоторых случаях им вполне полагалась полная аналогия двух величин A, B относительно двух систем

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots, \\ b_1, b_2, b_3, \dots, \end{aligned}$$

из которых вытекает одинаковость выражения A через a_1, a_2, a_3, \dots и B через b_1, b_2, b_3, \dots .

Здесь следует упомянуть о круговой перестановке при получении системы формул.

Примером может служить формула для x , определяемая вместе с y системой уравнений первой степени:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= c, \\ b_1x + b_2y &= d. \end{aligned} \quad (1)$$

А именно

$$x = \frac{cb_2 - da_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Следует ли, найдя x , находить еще y ? Я думаю, достаточно систему (1) переписать в виде

$$\begin{aligned} a_2y + a_1x &= c, \\ b_2y + b_1x &= d, \end{aligned} \quad (2)$$

чтобы увидеть, что когда у играет роль x , то a_2, b_2, a_1, b_1 играют соответственно роли a_1, b_1, a_2, b_2 , т. е. в знаках происходит круговая перестановка и

$$y = \frac{cb_1 - da_1}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

13. Несколько слов о силлогизмах в математике. Мы вовсе не предлагаем по рецепту Дазиподия и других излагать доказательства, вкладывая их в силлогические схемы, подчеркивая большую и малую посылки и заключение. Но нет сомнения, без закрепления над моментами вывода схоластических ярлыков, ученик должен вполне ясно сознавать то, что сейчас дано в форме предположения, то, что раньше было выведено или вытекает из определений или аксиом и, наконец, то, что выводится. Что учащийся инстинктивно ищет таких схем для вывода, что ум его расчленяет вывод так, как этого требует если не силлогистическая, то другая, может быть более правильная схематика,—это можно видеть хотя бы из того, что он, развивая свои выводы символически, имеет знаки для вывода (означаемого в математической логике через \supset) и означает его иногда, смущая преподавателя, знаком равенства (=).

Силлогистические модусы не имеют большого значения для математики. Из того, что нами было сказано о частноутвердительном и частноотрицательном суждениях, следует, что из 19 модусов только 5, содержащих только A (общеутвердительное суждение) и E (общеотрицательное), имеют значение в математике. Это будут модусы:

I фигура.

$$\begin{array}{c|c} MP \\ SM \\ \hline SP \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Barbara и Celarent,} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|c} \text{т. е. все } M \text{ суть } P & \text{ни одно } M \text{ не } P \\ \hline \text{все } S \text{ суть } M & \text{все } S \text{ суть } M \\ \hline \text{все } S \text{ суть } P & \text{ни одно } S \text{ не } P \end{array}.$$

II фигура.

$$\begin{array}{c|c} PM \\ SM \\ \hline SP \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Cesare и Camestres:} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|c} \text{ни одно } P \text{ не } M & \text{все } P \text{ суть } M \\ \hline \text{все } S \text{ суть } M & \text{ни одно } S \text{ не } M \\ \hline \text{ни одно } S \text{ не } P & \text{ни одно } S \text{ не } P \end{array}.$$

III фигура.

$$\begin{array}{c|c} PM \\ MS \\ \hline SP \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Camepe:} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \text{все } P \text{ суть } M \\ \hline \text{ни одно } M \text{ не } S \\ \hline \text{ни одно } S \text{ не } P \end{array}.$$

14. Учащийся должен ясно представлять родословное дерево геометрии. Было бы полезно для ученика построить хотя бы в начале геометрии нижнюю его часть, подымающуюся от определения и аксиом. Неважно, что некоторые корни остаются не обозначенными и ветвей больше, чем думает ученик, а может быть и учитель. Этим родословным деревом, логической цепью связующей теоремы, в школе слишком мало интересуются.

Вся геометрия представляется какими-то отрывками, которые быстро вылетают из памяти. Я не встречал ученика, который бы ясно понимал, почему приходится дважды обращаться к внешнему углу треугольника, сперва доказывая, что он больше внутреннего с ним не смежного, а потом то, что он равен сумме внутренних углов. Важный момент введения аксиомы о параллельных должен быть подчеркнут не для того, чтобы затем перейти к неэвклидовой геометрии, совершенно не годящейся для школы, а для того, чтобы выяснить эту логическую структуру геометрии, чтобы представить геометрию не как конгломерат теорем, а как систему.

Я отмечу здесь всеми признаваемую важную связь между логикой и математикой, которую должен знать, если не ученик, то во всяком случае учитель. Логика, как тоже наука дедуктивная, выводящая из некоторой системы логических постулатов различные логические положения, может сплести часть своей сети друг с другом связанных положений с сетью положений чистой математики.

Некоторые математические положения будут выводиться из положений математических и положений чисто логических, относящихся к столь общим понятиям, что под них могут подводиться как математические, так и нематематические.

Собственно говоря, логические положения, а именно, основные логические аксиомы (например, аксиомы тождества, противоречия, исключенного третьего), на которых зиждется силлогистика, входят всегда наряду с частноматематическими аксиомами в логическое построение математики.

Но в иных случаях мы имеем гораздо больше: в ряд умозаключений вводится чисто логическая теорема, которая доказывается в чистой логике.

15. Примером можно выставить доказательство некоторых обратных теорем в геометрии с помощью теоремы Гаубера¹⁾, о которой обычно не подозревает не только ученик, но и учитель. Эта теорема состоит в следующем. Если установлено несколько теорем, условия которых

H, H', H'', \dots

обнимают все возможные случаи, и заключения которых

C, C', C'', \dots

несовместны, то все обратные теоремы верны: из C следует H из $C' — H'$, из $C'' — H''$, ... и т. д.

¹⁾ Hauber, Chrestomatie Geometriae.

Доказательство. Предположим, что при C не имеет места H ; тогда должны иметь место H' , H'' ..., ибо это по условию нашему единственно возможные гипотезы. Но если выполнено H' , то из этого предположения следует C' , так что рядом с C имеет место и C' , но это в силу несовместимости C и C' быть не может.

Этот принцип применим к доказательству теорем и экономизирует деятельность логического аппарата.

Конечно, в силу своей абстрактности теорема Гаубера едва ли может быть изложена на уроке до доказательства с помощью „трех гипотез“, выражаемых в частных конкретных формах. Ее следует излагать потом, когда ученик вполне усвоит эти доказательства и уловит сам общий их скелет.

В качестве примера можно привести следующие трихотомии.

Требуется угол AMB вписать в круг.

Если точка N лежит на окружности, то угол ANB , с вершиной в N , опирающийся на дугу AB , равен углу AMB ;

если N внутри круга, то больше,

если N вне круга, то меньше.

Здесь H —точка N на окружности:

H' —внутри и

H'' —вне круга.

Кроме этих случаев других быть не может. С другой стороны: C (равно), C' (больше), C'' (меньше) исключают друг друга.

Ссылаясь на теорему Гаубера, можем обратить все эти положения и получить обратную трихотомию.

Если $\angle ANB = \angle AMB$, то точка N лежит на окружности, описанной около AMB . Если $\angle ANB > \angle AMB$, то внутри; если $\angle ANB < \angle AMB$, то вне.

Теорема о том, что биссектриса равнобедренного треугольника (abc) совпадает с высотой, обращается на основании теоремы Гаубера в следующую трихотомию:

если $\angle acd > \angle bcd$, то $\angle adc < R$ (прямого угла),

если $\angle acd = \angle bcd$, то $\angle adc = R$,

если $\angle acd < \angle bcd$, то $\angle adc > R$.

Взяв другие C , C' , C'' , именно:

$$ad > bd, \quad ad = bd, \quad ad < bd,$$

получаем в равнобедренном треугольнике совпадение биссектрисы с медианой; на основании теоремы Гаубера получаем обратную теорему.

16. Мы упомянем еще другую теорему, которая, конечно, представляет значительно менее интереса, но с которой связывается понятие о противоположных и обратных теоремах, не всегда уясняемое учениками.

Из четырех положений

- 1) A есть B , 2) B есть A ,
 3) не A не есть B , 4) не B не есть A ,

т. е. данного обратного данному, противоположного данному и противоположного обратному, каждые два влекут за собой остальные два,

Например 1) и 3) влекут 2) и 4), ибо если бы оказалось B не A , то так как не A не есть B , то оно есть B , что было бы противно закону противоречия. Можно эти четыре положения заменить следующими:

- 1) если A , то B ; 2) если B , то A ;
 3) если не A , то не B ; 4) если не B , то не A .

В этой форме мы имеем B как условие необходимое 1) и как условие достаточное 2) для A ; не B как условие необходимое 3) и условие достаточное 4) для не A .

Надо сознаться, что если ученик часто неявно представляет сущность обратной теоремы, то условия, необходимые и достаточные, он постоянно путает.

В сущности он проходит через те же ошибки, через которые проходило человечество. История науки указывает целый ряд ошибок от обращения положений и принятия условий достаточных за необходимые.

Я приведу следующий пример такой четверки теорем:

- 1) если треугольник прямоугольный, т. е. если

$$\angle A = R,$$

то сумма квадратов катетов равняется квадрату гипотенузы

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2;$$

- 2) если $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, то $\angle A = R$;
 3) если $\angle A \geq R$, то $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \geq \overline{BC}^2$;
 4) если $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \geq \overline{BC}^2$, то $\angle A \geq R$.

На теорему 2), т. е. теорему, обратную теореме Пифагора, обычно не обращают внимания, между тем как именно она, а не сама теорема Пифагора, имела важное значение, лежа в основе так называемого правила веревки у египтян. Треугольник со сторонами такими, что $a^2 = b^2 + c^2$ (например, 5, 4, 3), давал возможность строить прямой угол.

ЗАДАЧИ

Решения нижеследующих задач предлагается присылать по адресу: Москва центр, Б. Комсомольский, 6, ОНТИ, Гл. редакция общетехнической литературы и номографии, в редакцию „Математического просвещения“.

74. Построить равнобедренный треугольник по высоте и медиане опущенным на одну из равных сторон.

75. Международная комиссия состоит из 11 представителей различных стран. Материалы, над которыми работает комиссия, хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена комиссии, чтобы доступ к материалам был возможен только тогда, когда собираются любые шесть членов комиссии, но не меньше.

Обобщить задачу.

76. Решить уравнение

$$1! \cdot 3! \cdot 5! \dots (2x-1)! = \left[\frac{x(x+1)}{2} \right] !$$

А. В. (Москва).

77. Точка D — ортоцентр (точка пересечения высот) тупоугольного треугольника ABC . Доказать, что каждая из четырех точек A, B, C, D является в этом случае ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными точками.

М. И. Шайкевич (Москва).

78. Найти сумму ряда:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + [n(n+1)]^3 + [n(2n+1)]^3 + \dots + [n(n^2+1)]^3.$$

79. К окружности $x^2 + y^2 = a^2$ проводят всевозможные касательные и отрезки их, заключенные между координатными осями, делят в отношении $m:n$. Найти уравнение геометрического места точек деления.

Ключарев (Куйбышев).

80. Показать, что оси парабол, имеющих общий фокус и проходящих через две данные точки, параллельны асимптотам гиперболы, которая проходит через общий фокус и фокусами которой являются данные точки.

81. Взяты две хорды равнобочной гиперболы; через середину каждой из этих хорд проведена прямая, параллельная другой хорде. Доказать, что точка пересечения этих прямых, середины хорд и центр гиперболы лежат на одной окружности.

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону).

82. Доказать, что всякая равнобочная гипербола, проходящая через три данные точки A, B, C , проходит также и через точку пересечения высот треугольника ABC .

М. И. Шайкевич (Москва).

83. Вычислить

$$\int \ln \sin \theta \, d\theta.$$

84. Из уравнения

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{x+z} du \int_0^\infty e^{-u} u^{y+z} du = \int_0^\infty e^{-u} u^{x+y} du$$

определить целые положительные x, y и z .

А. В. (Москва).

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Задачи, предложенные на приемных испытаниях в Московский геологоразведочный институт в августе 1934 г.

I. Периметр прямоугольного треугольника $2p = 27.425$ м, один из углов $\alpha = 41^\circ 15' 32''$. Определить объем тела, полученного при вращении треугольника около гипотенузы.

II. Решить уравнение

$$\frac{7(x-5)}{6} - \frac{9x-25}{36} = x - \frac{9x-5(4-x)}{9}.$$

III. Упростить

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \frac{4}{5} \sqrt[3]{0,048}.$$

I. Решить систему уравнений

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = 0,375,$$

$$2y - x = 1.$$

II. Сторона основания правильной трехгранной пирамиды равна 30,4 см, плоский угол при вершине равен $36,40^\circ$.

Вычислить полную поверхность.

III. Первый член арифметической прогрессии равен 10, последний равен — 9, сумма членов равна 10. Определить разность прогрессии.

I. В основании прямого параллелепипеда острый угол $\alpha = 28^\circ 25'$, а стороны $a = 6$ м и $b = 4$ м; меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить объем этого параллелепипеда.

II. Решить систему:

$$\frac{x}{y} = \frac{c+d - \frac{cd}{c+d}}{c-d + \frac{cd}{c-d}},$$

$$x + y = 2c^2.$$

III. Решить уравнение:

$$\lg_3 81 = -\frac{2}{3}.$$

I. В правильной четырехугольной пирамиде даны: стороны основания $a = 15,3$ м и плоский угол при вершине $\alpha = 23^\circ 15' 42''$. Определить ее объем и полную поверхность.

II. Решить систему уравнений

$$\frac{1}{x-y} + \frac{2}{2x+3y} = 7,$$

$$\frac{3}{x-y} - \frac{4}{2x-3y} = 16.$$

III. Разложить по формуле бинома Ньютона

$$(\sqrt{x+y})^6.$$

I. Коэффициент третьего члена разложения $(1-\sqrt{x})^n$ равен 21. Определить четвертый член.

II. Упростить выражение

$$\left(\frac{x}{1-x} - \frac{2+x}{1+x} + \frac{2x^2}{x^2-1}\right) \cdot (1-x).$$

III. Объем конуса равен 1 дм^3 , радиус основания равен 2 см . Определить угол между образующей и плоскостью основания.

I. Равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона в 10 м , а угол при вершине $\alpha = 120^\circ$, вращается около боковой стороны. Определить объем и поверхность тела вращения.

II. Упростить:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9} : \frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}.$$

III. Решить уравнение:

$$3^{x-2} = 243.$$

I. Упростить выражение:

$$\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}x}{x + \sqrt{x^2 - a^2}x} + \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}x}{x - \sqrt{x^2 - a^2}x}.$$

II. Прямоугольная трапеция с основаниями $5,4 \text{ см}$ и 26 мм и острым углом при большем основании 47° вращается вокруг оси, проведенной через вершину данного острого угла параллельно высоте трапеции. Определить объем тела вращения.

III. Написать разложение

$$\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^5.$$

I. Цилиндр пересечен плоскостью, проходящей через его ось. Площадь сечения m , а диагональ сечения наклонена к образующей цилиндра под углом α :

1) определить объем цилиндра в общем виде;

2) вычислить его при $m = 275,075 \text{ м}^2$ и $\alpha = 30^\circ 30' 15''$.

II.

$$\frac{1-x}{\sqrt{5^{2-x}}} \cdot \frac{1-x^2}{\sqrt{25}} = \frac{1-x}{\sqrt{5^{2+x}}}.$$

Найти x .

III.

$$\frac{xy - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right).$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Доказать, что если из любого трехзначного числа вычесть число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и к полученному числу прибавить число, написанное такими же цифрами, но в обратном порядке, то в сумме получится 1089. Например:

$$\begin{aligned} 864 - 468 &= 396; \\ 396 + 693 &= 1089. \end{aligned}$$

Формулировка задачи нуждается в двух существенных оговорках: а) цифра сотен данного числа не должна равняться цифре единиц; б) в случае, если цифра сотен отличается от цифры единиц на 1, следует при первом вычитании поставить цифру сотен 0, т. е. написать 099.

Помещаем наиболее оригинальное из присланных решений:

Пусть заданное число записывается цифрами a, b, c (т. е. равно $100a + 10b + c$). Положив $a > c$, мы не уменьшим общности решения, ибо мы в этом случае пренебрегаем только знаками.

Производим вычитание так, как мы это делаем в арифметике:

$$\begin{array}{r} - \quad a', b', c \\ \quad c, b, a \\ \hline a - 1 - c, 9, 10 + c - a \end{array}$$

при вычитании a из c занимаем один десяток, так как $c < a$. При вычитании b из $(b - 1)$ занимаем сотню:

$$10 + (b - 1) - b = 9.$$

Производим сложение:

$$\begin{array}{r} + \quad a - 1 - c, 9, 10 + c - a \\ \quad 10 + c - a, 9, \quad a - 1 - c \\ \hline \quad \quad 10, 8, 9 \end{array}$$

при сложении десятков получалась одна сотня „в уме“.

Результат: 10, 8, 9, т. е. 1089.

Шахтактинский (Баку), Абольян (Ставрополь), Иванов (Ленинград), Орлов (Киев), Павлинский (Днепропетровск), Радциг (Ленинград), Сидярь (Чернигов), Черемшанский (Москва), Яницкий (Ленинград).

2. Доказать, что при всяком целом n десятичная дробь, в которую обращается сумма дробей:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2},$$

будет смешанной периодической.

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)};$$

из трех последовательных чисел n , $(n+1)$ и $(n+2)$ одно должно делиться на 3; в числителе первые два члена делятся на 3, а третий нет, т. е. числитель при любом n не делится на 3. Следовательно, тройка в знаменателе не сокращается, и дробь является периодической.

Предположим, что $n = 2k$ — число четное; тогда $n+2$ — число тоже четное, причем либо n , либо $(n+2)$ содержит множитель 4. Таким образом знаменатель содержит множитель 8. Числитель $12k^2 + 12k + 2 = 2(6k^2 + 6k + 1)$ содержит множителем только одну двойку. Следовательно, дробь сократится на 2, причем в знаменателе после сокращения остается множитель 4. Значит, рассматриваемая дробь — смешанная периодическая, имеющая не менее двух цифр до периода.

Если же n — число нечетное, то $(n+1)$ — четное, и в знаменателе имеется множитель 2. В числителе же 2 члена четные ($6n$ и 2), а третий член ($3i^2$) нечетный, следовательно, числитель — число нечетное, и множитель 2 в знаменателе не сокращается, т. е. наша дробь — смешанная периодическая, имеющая по крайней мере одну цифру до периода.

Радциг (Ленинград).

3. Даны две пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}.$$

Найти условие, при котором четыре числа $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, $d + d'$ тоже образуют пропорцию.

Из

$$\frac{a + a'}{b + b'} = \frac{c + c'}{d + d'}$$

следует

$$ad' + ad' + a'd + a'd' = bc + bc' + b'c + b'c'.$$

Приняв во внимание, что

$$ad = bc,$$

$$a'd' = b'c',$$

(1)

будем иметь:

$$ad' + a'd = bc' + b'c.$$

Перенеся все члены в левую часть, умножив их на dd' и, вновь воспользовавшись равенствами (1), получим:

$$bcd'^2 + b'c'd^2 - bc'dd' - b'cdd' = 0.$$

Левая часть легко разлагается на множители:

$$(cd' - c'd)(bd' - b'd) = 0.$$

Отсюда или

$$cd' - c'd = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'},$$

или

$$bd' - b'd = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{b}{b'} = \frac{d}{d'} = k. \quad (2)$$

Первое условие не представляет интереса, так как в таком случае

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'},$$

откуда сразу следует:

$$\frac{a + a'}{b + b'} = \frac{c + c'}{d + d'}.$$

Второе условие интереснее. Разделив в (1) первое равенство на второе и воспользовавшись (2), получим:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} = k';$$

отсюда $a = k'a'$, $b = kb'$, $c = kc'$, $d = kd'$, и, следовательно,

$$\frac{a + a'}{b + b'} = \frac{(k' + 1) a'}{(k + 1) b'};$$

$$\frac{c + c'}{d + d'} = \frac{(k' + 1) c'}{(k + 1) d'}.$$

Но

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'},$$

поэтому

$$\frac{a + a'}{b + b'} = \frac{c + c'}{d + d'}.$$

Этим доказана достаточность условия (2).

4. Пусть Q — отношение общего наименьшего кратного двух чисел A и B к их общему наибольшему делителю. Найти A и B , зная, что $Q = 120$; $A + B = 667$.

Обозначим общего наибольшего делителя чисел A и B буквой D , их дополнительных множителей — буквами m и n , т. е. $A = Dm$ и $B = Dn$, где m и n взаимно простые. Общее наименьшее кратное этих чисел равно Dmn и, следовательно:

$$Q = \frac{Dmn}{D} = mn = 120.$$

С другой стороны:

$$A + B = D(m + n) = 667.$$

Число 667 разлагается на множители $23 \cdot 29$. Следовательно, возможны три случая:

$$1) D = 1, m + n = 667;$$

$$2) D = 23, m + n = 29;$$

$$3) D = 29, m + n = 23;$$

получаем три системы уравнений:

$$\begin{array}{l|l|l} m + n = 667, & m + n = 29, & m + n = 23, \\ mn = 120. & mn = 120. & mn = 120. \end{array}$$

Первая система уравнений не дает целых решений; вторая и третья дают:

$$m_1 = 24, n_1 = 5 \text{ и } m_2 = 15, n_2 = 8.$$

откуда

$$\begin{array}{l|l} A_1 = 24 \cdot 23 = 552, & A_2 = 15 \cdot 29 = 435, \\ B_1 = 5 \cdot 23 = 115, & B_2 = 8 \cdot 29 = 232. \end{array}$$

Павлинский (Днепропетровский), Городов (Кадиевка), Иваниов (Ленинград), Радциг (Ленинград), Турбин (Воронеж), Черемшанский (Москва).

5. Показать, что числа вида $n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n$ делятся на 120 при целом n .
Разлагаем на множители:

$$n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n^2 + 1).$$

Первые 4 множителя — последовательные целые числа, следовательно, их произведение делится на $4! = 24$. Если хоть одно из них делится на 5, то произведение делится на 120. Если же ни одно из них не делится на 5, то число должно иметь вид $5k + 2$. Внося это выражение вместо n в последний множитель, получим $25k^2 + 20k + 5$, т. е. в этом случае пятый множитель делится на 5, следовательно, произведение делится на 120.

Городов (Кадиевка), Павлинский (Днепропетровский), Радциг (Ленинград), Черемшанский (Москва), Шахтахтинский (Баку), Яницкий (Ленинград).

6. Решить систему уравнений:

$$x + y = 4, \quad (1)$$

$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \quad (2)$$

Второе уравнение перепишем в виде:

$$(x^2 + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 280. \quad (3)$$

Из уравнения (1) следует:

$$x^2 + y^2 = 16 - 2xy. \quad (4)$$

Вносим (1) и (4) в (3) и сокращаем на 4:

$$(16 - 2xy)(16 - 3xy) = 70. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно xy , найдем

$$x_1 y_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 y_2 = \frac{31}{3}.$$

Решая две системы уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x + y = 4, & x + y = 4, \\ xy = 3, & xy = \frac{31}{3}, \end{array}$$

найдем:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 3;$$

$$x_2 = 3, \quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = 2 + i \sqrt{\frac{19}{3}}, \quad y_3 = 2 - i \sqrt{\frac{19}{3}};$$

$$x_4 = 2 - i \sqrt{\frac{19}{3}}, \quad y_4 = 2 + i \sqrt{\frac{19}{3}}.$$

Павляиский (Днепропетровск), Городов (Кадиевка), Иванов (Ленинград), Радциг (Ленинград), Цимбалов (Киев), Яницкий (Ленинград).

7. Определить a , b , c таким образом, чтобы многочлен

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 4$$

был квадратом другого многочлена и принимал значение 1 при $x = -1$.

Полагаем

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 4 = (x^2 + mx + n)^2,$$

где m и n — неопределенные коэффициенты. Раскрываем скобки и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$a = 2m; \quad b = m^2 + 2n; \quad c = 2mn; \quad n^2 = 4,$$

т. е.

$$n = \pm 2.$$

Условие обращения данного многочлена в единицу при $x = -1$ дает:

$$1 - a + b - c + 4 = 1,$$

т. е.

$$a - b + c = 4.$$

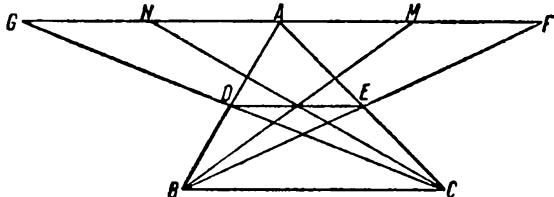
Чтобы доказать правильность построения, нужно доказать, что AD есть биссектриса треугольника ABC .

Продолжим BA до пересечения с CN в точке E . Так как $AM = MD$, то $EN = NC$, следовательно, треугольник EAC равнобедренный и $\angle AEC = \angle ACE$. Но $\angle BAD = \angle AEC$, $\angle DAC = \angle ACE$, поэтому $\angle BAD = \angle DAC$.

11. В треугольнике ABC провести прямую DE параллельно BC так, чтобы

$$BD + EC = 2DE.$$

Через вершину A (см. фигуру) проводим прямую GF , параллельную BC , пересекающуюся в точках G и F биссектрисами CG и BF углов C и B . Среднюю N отрезка AG соединим с C , а среднюю M отрезка AF с B . Через точку H пересечения прямых CN и BM проводим отрезок DE , параллельный основанию BC , ограниченный сторонами AB и AC . Прямая DE и есть искомая.



Действительно, из равенства углов $\angle ABF = \angle FBC = \angle AFB$, $\angle ACG = \angle GCB = \angle AGC$ следует $AB = AF$ и $AC = AG$. Из подобия треугольников BDH и BAM , CEH и CAN :

$$\frac{DH}{BD} = \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AF} = \frac{1}{2}; \quad \frac{EH}{CE} = \frac{AN}{AC} = \frac{AN}{AG} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$CE + BD = 2EH + 2DH = 2DE,$$

что и требовалось.

12. Решить треугольник по радиусу r вписанного круга, радиусу R описанного круга и высоте h_a .

Известно, что

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}};$$

и

$$a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

следовательно:

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Далее, известно, что $h = 2R \sin B \sin C$, или

$$h = 8R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Делим r на h :

$$\frac{r}{h} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}};$$

отсюда

$$\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{h \sin \frac{A}{2}}{2r}. \quad (2)$$

Из (1) имеем:

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R \sin \frac{A}{2}}. \quad (3)$$

Вычтем (3) из (2):

$$\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{h \sin \frac{A}{2}}{2r} - \frac{r}{4R \sin \frac{A}{2}}. \quad (4)$$

Но левая часть равенства есть $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$, следовательно:

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{h \sin \frac{A}{2}}{2r} - \frac{r}{4R \sin \frac{A}{2}}. \quad (5)$$

Из этого уравнения определим $\sin \frac{A}{2}$:

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{2R(h-2r)}}.$$

Теперь легко найдем остальные элементы треугольника:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{2R(h-2r)-r^2}{2R(h-2r)}}; \\ \sin A &= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{r \sqrt{2R(h-2r)-r^2}}{R(h-2r)}; \\ a &= 2R \sin A = \frac{2r \sqrt{2R(h-2r)-r^2}}{h-2r}; \\ S &= \frac{ah}{2} = \frac{rh \sqrt{2R(h-2r)-r^2}}{h-2r}; \quad p = \frac{S}{r} = \frac{h \sqrt{2R(h-2r)-r^2}}{h-2r}; \\ b+c &= 2p-a = \frac{2(h-r) \sqrt{2R(h-2r)-r^2}}{h-2r}. \end{aligned} \quad (7)$$

Но

$$bc = \frac{2S}{\sin A} = 2hR. \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) найдем:

$$b = \frac{(h-r) \sqrt{2R(h-2r)-r^2} + r \sqrt{2R(h-2r)-(h-r)^2}}{h-2r},$$

$$c = \frac{(h-r) \sqrt{2R(h-2r)-r^2} + r \sqrt{2R(h-2r)-(h-r)^2}}{h-2r},$$

$$\sin B = \frac{b}{2R} = \frac{(h-r) \sqrt{2R(h-2r)-r^2} + r \sqrt{2R(h-2r)-(h-r)^2}}{2R(h-2r)},$$

$$\sin C = \frac{c}{2R} = \frac{(h-r) \sqrt{2R(h-2r)-r^2} - r \sqrt{2R(h-2r)-(h-r)^2}}{2R(h-2r)}.$$

Павленский (Днепропетровск).

13. Доказать, что во всяком треугольнике

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r+4R}{p};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{\cos^2 \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{1 - \sin^2 \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{1 + \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{1 + \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{1 + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \operatorname{sc} \frac{A}{2} \operatorname{sc} \frac{B}{2} \operatorname{sc} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Но $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{S}{p^2} = \frac{r}{p}$; с другой стороны, $p = R(\sin A + \sin B + \sin C) =$

$$= 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}; \text{ следовательно, } \operatorname{sc} \frac{A}{2} \operatorname{sc} \frac{B}{2} \operatorname{sc} \frac{C}{2} = \frac{4R}{p}.$$

Полученная выше формула принимает теперь вид:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{4R}{p} + \frac{r}{p} = \frac{4R+r}{p},$$

что и требовалось доказать.

Иванов (Ленинград), Павлиньский (Днепропетровск).

14. Решить уравнение: $\sec^2 x + \sec^2 2x = 12$.

Уравнение можно переписать так:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 2x} = 12$$

или

$$\cos^2 2x + \cos^2 x = 12 \cos^2 x \cos^2 2x.$$

Но $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, поэтому получаем:

$$(2 \cos^2 x - 1)(1 - 12 \cos^2 x) + \cos^2 x = 0.$$

Обозначив $\cos^2 x = z$ и раскрыв скобки, получим кубическое уравнение

$$48z^3 - 52z^2 + 15z - 1 = 0.$$

Уравнение имеет очевидный корень $z_1 = \frac{1}{3}$. Понижаем степень уравнения

делением на $z - \frac{1}{3}$. Получим $48z^2 - 36z + 3 = 0$; отсюда $z_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$, $z_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$. Следовательно:

$$\cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 \approx \pm 55^\circ + 360^\circ n.$$

$$\cos x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 \approx \pm 125^\circ + 360^\circ n.$$

$$\cos x_3 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}, \quad x_3 = \pm 36^\circ + 360^\circ n.$$

$$\cos x_4 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}, \quad x_4 = \pm 144^\circ + 360^\circ n.$$

$$\cos x_5 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}, \quad x_5 = \pm 72^\circ + 360^\circ n.$$

$$\cos x_6 = -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}, \quad x_6 = \pm 108^\circ + 360^\circ n.$$

Павлиньский (Днепропетровск), Иванов (Ленинград).

15. Игра в монеты. Два игрока по очереди кладут на стол пятикопеечные монеты. Выигравшим игру считается тот, кто положит монету последним. Как должен класть монеты игрок, начинающий игру, чтобы обеспечить себе выигрыш?

Стол имеет прямоугольную форму. Монеты класть можно только на свободные места, чтобы они не закрывали друг друга даже отчасти. Каждый из играющих имеет неограниченное количество монет. Сдвигать монеты с мест, на которые они положены, нельзя.

Игрок, кладущий монету первым, должен совместить центр монеты с центром стола. В дальнейшем он кладет свою монету каждый раз симметрично монете, положенной противником относительно центра стола.

Радциг (Ленинград), Павлинский (Днепропетровск), Кастровицкий (Слуцк).

16. Найти сумму девярых степеней корней уравнения:

$$x^3 + 3x + 9 = 0.$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ —корни предложенного уравнения. Это значит, что

$$\alpha_i^3 + 3\alpha_i + 9 = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Из высшей алгебры известно, что для уравнения $x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$:

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -p_1, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = p_2.$$

В данном случае

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = 3. \quad (2)$$

Умножим первое из равенств (1) на α_1^{k-3} , второе на α_2^{k-3} и третье на α_3^{k-3} и сложим их:

$$(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k) + 3(\alpha_1^{k-2} + \alpha_2^{k-2} + \alpha_3^{k-2}) + 9(\alpha_1^{k-3} + \alpha_2^{k-3} + \alpha_3^{k-3}) = 0,$$

или, введя обозначение $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k = S_k$: $S_k + 3S_{k-2} + 9S_{k-3} = 0$, т. е.

$$S_k = -3S_{k-2} - 9S_{k-3}. \quad (3)$$

Формула (3) позволяет вычислять S_k , зная S_{k-2} и S_{k-3} . Но $S_1 = 0$; найдем S_2 :

$$S_2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) = -6.$$

Складывая же равенства (1), найдем $S_3 + 3S_1 + 27 = 0$; $S_3 = -27$. Применяя теперь рекуррентную формулу (2), последовательно получим:

$$\begin{aligned} S_4 &= -3S_2 - 9S_1 = 18, & S_5 &= -3S_3 - 9S_2 = 135, \\ S_6 &= -3S_4 - 9S_3 = 189, & S_7 &= -3S_5 - 9S_4 = -567, \\ S_8 &= -3S_6 - 9S_5 = 0. \end{aligned}$$

Павлинский (Днепропетровск), Городов (Кадиевка).

17. В данный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю.

Пусть ABC —данный треугольник и $DEMN$ —вписанный в него прямоугольник. Из подобия треугольников ABC и BDE , с одной стороны, и $AB'C$ и $B'D'E'$, с другой (фиг. 1, см. след. стр.), легко заключить, что при перенесении точек B, D, E параллельно основанию AC длина стороны DE и диагонали ME не изменяются:

$$DE = D'E'; \quad ME = M'E'.$$

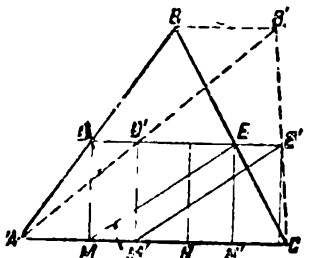
Отсюда следует, что задачу достаточно решить для треугольника $AB'C$ с прямым углом при A (фиг. 2). Но в этом случае диагональ AE' будет иметь минимум при условии $AE' \perp B'C$. Отсюда следует построение для произвольного треугольника ABC (фиг. 2).

Перепелкин (Москва), Павлинский (Днепропетровск), Городов (Кадиевка), Радциг (Ленинград).

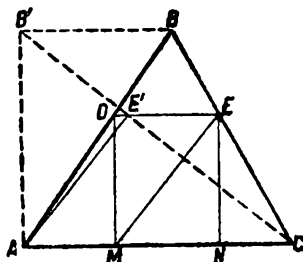
18. Найти вид функции из равенства:

$$n^{f(n)-1} = (n-1)^{f(n-1)}. \quad (1)$$

Искомая функция для целых положительных n определяется непосредственно из равенства (1).



Фиг. 1



Тогда, по условию задачи:

$$a = k^n + l^n - 1, \quad b = k^n + l^n, \quad c = k^n + l^n + 1;$$

отсюда

$$p = \frac{3}{2} (k^n + l^n), \quad p - a = \frac{1}{2} (k^n + l^n + 2),$$

$$p - b = \frac{1}{2} (k^n + l^n), \quad p - c = \frac{1}{2} (k^n + l^n - 2).$$

Следовательно, площадь S равна:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{(k^n + l^n)^2 (k^n + l^n + 2) (k^n + l^n - 2)} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (k^n + l^n) \sqrt{k^{2n} + 2k^n l^n + l^{2n} - 4}. \end{aligned}$$

Но при принятых обозначениях $kl = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ и $k^n l^n = 1$; значит

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4} (k^n + l^n) \sqrt{k^{2n} + 2k^n l^n + l^{2n} - 4k^n l^n} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (k^n + l^n) \sqrt{k^{2n} - 2k^n l^n + l^{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (k^n + l^n) (k^n - l^n) = \frac{\sqrt{3}}{4} (k^{2n} - l^{2n}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что S — целое число.

Прежде всего заметим, что в разложении $k^{2n} = (2 + \sqrt{3})^{2n}$ иррациональными останутся все члены, стоящие на четных местах, так как в них $\sqrt{3}$ войдет в нечетной степени. Сложив между собой все рациональные члены и приведя иррациональные (подобные, содержащие только $\sqrt{3}$) члены, получим:

$$k^{2n} = A + B\sqrt{3},$$

где A и B — целые числа.

С другой стороны, $l^{2n} = A - B\sqrt{3}$, где A и B — те же самые числа, ибо l^{2n} отличается от k^{2n} знаками при всех членах, стоящих на четных местах, т. е. содержащих $\sqrt{3}$.

Таким образом находим:

$$k^{2n} - l^{2n} = 2B\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{3}{2} B.$$

Но выражение $k^{2n} - l^{2n}$, равное $2B\sqrt{3}$, можно разложить на множители: $k^{2n} - l^{2n} = (k + l)Q = 4Q$, где Q — иррациональный многочлен. Следовательно, $4Q = 2B\sqrt{3}$ или $B = \frac{2Q}{\sqrt{3}}$, т. е. B содержит множитель 2; значит, 2 в выражении (3) сократится и S — целое число, делящееся на 3 (можно доказать, что B делится на 6, выделив из S множитель $k - l = 2\sqrt{3}$).

Городов (Кадиевка), Павлинский (Днепропетровск), Шахтахтинский (Баку).

20. В эллипсе провести параллельно большой оси хорду так, чтобы, соединив концы ее прямыми с концами большой оси, получить трапецию наибольшей площади.

Решим эту задачу сначала для окружности радиуса a . Рассмотрим сначала четырехугольники $ABCD$, имеющие три вершины в точках A , B и C , причем A и B — концы диаметров, а C — произвольная фиксированная точка на окружности. Площадь треугольника ABC не зависит от положения точки D , следовательно, площадь четырехугольника будет максимальной при максимальной площади треугольника CBD . В треугольнике CBD основание BC не зависит от положения точки D , следовательно, необходимо найти положение точки D , при котором высота DK треугольника CBD максимальна, т. е. найти на дуге точку, наиболее удаленную от хорды. Этому условию отвечает середина дуги BC . Итак, при любом фиксированном C следует выбирать четвертую вершину в середине дуги BC .

Аналогично рассуждаем и для четырехугольников с фиксированным положением вершины D . Итак, четырехугольник $ABCD$ имеет максимальную площадь, если $\angle AOC = \angle COD$ и $\angle COD = \angle DOB$, т. е. $\angle AOC = \angle COD = \angle DOB = 60^\circ$. Так как такой четырехугольник — трапеция, очевидно, он — трапеция максимальной площади.

Спроектируем теперь нашу окружность на плоскость, параллельную AB и наклоненную к плоскости окружности так, чтобы проекция диаметра KL равнялась $2b$; заметим, что площади всех трапеций изменялись в одно и то же число раз, следовательно, площадь проекции трапеции $ABCD$ останется больше площадей проекций всех остальных трапеций.

Заметив, что основание M перпендикуляра AM делит радиус AO пополам (ибо треугольник AOC равносторонний) и что проекция M разделит AO также пополам, ибо AB параллельно плоскости проекций, получаем построение.

Из середины большой полуоси восстанавливаем перпендикуляр и через точку пересечения этого перпендикуляра с эллипсом проводим хорду, параллельную большой оси.

21. Применить к нахождению интеграла

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

способы: 1) интегрирование по частям, 2) вторую подстановку Эйлера, 3) третью подстановку Эйлера, и объяснить различие получающихся результатов.

Интегрирование по частям дает:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad (I)$$

Вторая подстановка Эйлера дает:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - a}{x} + C. \quad (II)$$

Третья подстановка Эйлера дает:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C. \quad (III)$$

Нетрудно видеть, что все три интеграла (I), (II) и (III) отличаются друг от друга лишь на постоянную величину.

Г о р о д о в (Кадневка), П а в л и н с к и й (Днепропетровск).

22. Исследовать и вычислить действительные корни уравнения:

$$2^x = x + 3.$$

График дает первые грубые приближения $2 \leq x_1 \leq 3$ и $-3 \leq x_2 \leq -2$. Метод итераций позволяет улучшить эти корни. Положительный корень можно вычислять по формуле:

$$x_{n+1} = -\frac{1}{6} (2^{x_n} - 3 - 7x_n).$$

Результат: $x \approx 2,4449$. Для вычисления отрицательного корня можно воспользоваться формулой

$$x_{n+1} = 2^{x_n} - 3,$$

непосредственно получаемой из заданного уравнения. Результат $x \approx -2,8625$.

Шахтахтинский (Баку).

23. В треугольнике AB_0B_1 сторона B_0B_1 продолжена и на ее продолжении построены равные отрезки $B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n = \dots$. Обозначив радиусы вписанных и описанных окружностей для треугольников AB_0B_1 , AB_1B_2 , ..., $AB_{n-1}B_n$, ... соответственно через $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ и $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ доказать, что 1) при $n \rightarrow \infty$ радиус r_n стремится к нулю, а ряд

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n + \dots$$

— расходящийся; 2) ряд

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} + \dots$$

— сходящийся.

М. Зими (Новочеркасск)

Обозначим общую высоту всех треугольников, о которых идет речь, буквой h , а длину основания буквой a ; боковые стороны обозначим b, b_1, b_2, \dots ; проекции боковых сторон на AB (т. е. HB_1, HB_2, \dots) обозначим u_1, u_2, \dots .

Ясно, что $r_n = \frac{S}{p}$, причем S постоянно, так как a и h постоянны, а $p \rightarrow \infty$, так как $p = \frac{a + b_{n-1} + b_n}{2}$, a постоянно, а b_{n-1} и b_n неограниченно растут. Таким образом, доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Докажем расходимость ряда

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n + \dots \quad (1)$$

Рассмотрим величину $p = \frac{a + b_{n-1} + b_n}{2}$. Заметим, что $b_n < na + b$ (из треугольника AB_0B_n). Значит:

$$p < \frac{a + (n-1)a + b + na + b}{2} < na + b$$

и

$$r_n = \frac{S}{p} > \frac{S}{na + b}.$$

Члены ряда (1) больше членов ряда

$$\frac{S}{a+b} + \frac{S}{2a+b} + \frac{S}{3a+b} + \dots$$

Вынесем в этом ряду за скобки $\frac{S}{a}$:

$$\frac{S}{a} \left(\frac{1}{1 + \frac{b}{a}} + \frac{1}{2 + \frac{b}{a}} + \frac{1}{3 + \frac{b}{a}} + \dots \right). \quad (2)$$

Выберем какое-либо целое число q , $q > \frac{b}{2}$, тогда члены ряда (2) будут больше членов ряда:

$$\frac{S}{a} \left(-\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{q+3} + \dots \right). \quad (3)$$

Ряд, стоящий в (3) в скобках, расходится (гармонический), значит, расходится и ряд (2), и ряд (1), что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} + \dots \quad (4)$$

Общий член этого ряда $\frac{1}{R_n} = \frac{4S}{ah_{n-1}b_n}$. По $b_n' > u_n$, следовательно:

$$\frac{1}{R_n} < \frac{4S}{au_n^2}.$$

причем $u_n = u_0 + na$ и члены ряда (4) меньше членов ряда

$$\begin{aligned} \frac{4S}{a} &= \left(\frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{(u_0+a)^2} + \frac{1}{(u_0+2a)^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{4S}{a^3} \left(\frac{1}{\left(\frac{u_0}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{u_0}{a}+1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{u_0}{a}+2\right)^2} + \dots \right); \end{aligned} \quad (5)$$

члены ряда (5) меньше членов ряда

$$\frac{4S}{a^3} \left(1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right). \quad (6)$$

Из анализа известно, что ряд (6) сходится (доказательство группировкой 2, 4, 8, 16, ... членов), следовательно, сходится и ряд (5), и ряд (4), что и требовалось доказать.

Р а д ц и г (Ленинград), П а в а н и с к и й (Днепропетровск).

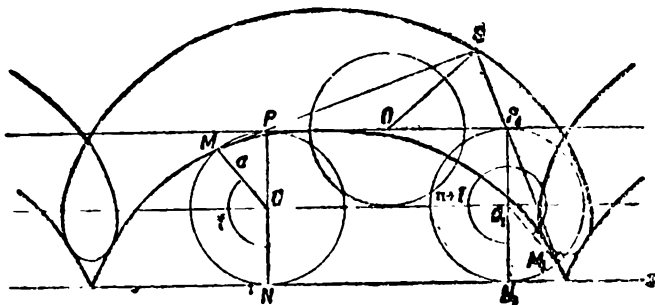
24. Найти геометрическое место вершин прямых углов, описанных около данной циклоиды.

Мы даем синтетическое решение задачи.

Как известно, циклоида может быть получена следующим образом: пусть M — точка на окружности радиуса a ; пусть эта окружность катится без скольжения по прямой u ; тогда точка M опишет циклоиду.

Рассмотрим положение образующего круга в тот момент, когда $\angle NCM = t$, и в тот момент, когда $\angle N_1C_1M_1 = \pi + t$. Прямые MP и M_1P_1 по известному свойству циклоиды являются касательными к циклоиде в точках M и M_1 . Так как $\angle NPM = \frac{t}{2}$ и $\angle N_1P_1M_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, то $\angle PSP_1 = \frac{\pi}{2}$; следовательно, точка S лежит на искомой кривой. Так как $\angle N_1P_1M_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, то $POS = t$ (O — середина отрезка PP_1). Точка O при качении круга C по прямой CC_1 и будет двигаться

по прямой PP_1 с той же скоростью, с какой точка C движется по прямой CC_1 . Поэтому движение точки S можно представить себе так: пусть около O описан круг радиуса a . Если этот круг будет катиться по кривой CC_1 с такой же скоростью, с какой катится круг C по прямой CC_1 , то точка S , связанная неподвижно с кругом O , будет двигаться по искомой кривой. Следовательно, искомая кривая есть удлинённая циклоида.



25. Прямоугольная трапеция, большее основание которой 3, высота 2, а меньшее основание x удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 3$, вращается около стороны, перпендикулярной к основанию. Найти наибольшее и наименьшее значения боковой поверхности тела вращения.

$$S = \pi(x+3)\sqrt{(3-x)^2+4};$$

$$S' = \pi \left| \sqrt{(3-x)^2+4} - \frac{(x+3)(3-x)}{\sqrt{(3-x)^2+4}} \right|.$$

Приравняв S' нулю $(3-x)^2+4-9+x^2=0$; $x_1=1$; $x_2=2$. Исследование S'' показывает, что при $x=1$ мы имеем максимум, а при $x=2$ минимум. Необходимо, однако, учесть краевые значения функции:

$$S_0 = 3\pi\sqrt{13} \quad (\text{при } x=0),$$

$$S_3 = 12\pi \quad (\text{при } x=3).$$

Критические же значения функции $S_1 = \pi\sqrt{128}$ (при $x=1$) и $S_2 = 5\pi\sqrt{5}$ (при $x=2$). Таким образом фактически наименьшее и наибольшее значения функция принимает не в точках минимума и максимума, а на границах интервала при $x=0$ и $x=3$.

Ответ: наибольшая поверхность при $x=3$ (цилиндр), наименьшая поверхность при $x=0$ (конус). Все присланные в редакцию решения этой задачи не учитывают значений функции на границах интервала, а потому дают неправильные ответы.

БИБЛИОГРАФИЯ

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

(Методические сборники № 1, 2, 3. УЧПЕДГИЗ, Москва 1934)

Выход первых сборников „Математика и физика в средней школе“ произвел среди преподавателей впечатление огромного и радостного события. Это и понятно: потребность в подобном издании ощущалась давно и была чрезвычайно велика. На рынке почти совершенно отсутствует какая бы то ни было литература для преподавателей математики и физики; нет доступной научной литературы, очень мало методической литературы. В особенно тяжелом положении оказываются молодые преподаватели, которые частенько вынуждены довольствоваться тем же стабильными учебниками, которыми пользуются их ученики. Недостаточное образование многих преподавателей в соединении с указанным недостатком необходимой литературы нередко приводит к тому, что преподаватель по своим знаниям мало чем отличается от своих учеников; даже преподаватель, получивший более солидное образование, не имея возможности путем систематического чтения поддерживать свою квалификацию, скатывается в конце концов к тому же незавидному уровню. На этом фоне появление рассматриваемых сборников действительно должно было произвести впечатление большого события и вызвать самые радужные надежды. К сожалению, как показывают первые сборники, эти надежды оказались несколько преувеличенными. Я ограничусь здесь рассмотрением лишь математической части сборников, предоставив рассмотрение физической части специалистам-физикам.

Начнем с научного отдела сборников. Как сообщает редакция „этот раздел ставит своей целью ввести читателя в круг тех вопросов, разработкой которых занята сейчас научная мысль в СССР и за границей“. На наш взгляд эта установка редакции совершенно ложна. Большинство вопросов, над которыми работает современная математика, настолько сложны и трудны, что даже при очень умелом изложении они едва ли могут быть сделаны доступными массовому учительству. Мне кажется, в этом отношении следует ограничиться помещением научно-популярных статей лишь по отдельным вопросам, которые представляют почему-либо особый интерес и допускают популярное изложение. Задачи научного отдела издания такого типа, какой представляют рассматриваемые сборники, на мой взгляд, лежат совсем в другом направлении. Именно, научный отдел должен прежде всего содержать статьи научного характера по элементарным вопросам математики. Такие статьи в сборниках имеются (статьи С. Зетеля, М. Зимина и И. Чистякова в первом сборнике, М. Гребенчи, В. Скворцова, П. Яковлева во втором, И. Кастровицкого, П. Белоновского, С. Зетеля, Е. Домбровского и С. Полякова в третьем), но им отводится слишком мало места (45 стр. из 390, т. е. меньше 12%). Между тем, как показывает пример Франции, подобные статьи являются весьма действенным фактором повышения знаний преподавателей и приобретения ими навыков научного мышления, тем более, что в такой элементарно-научной работе могут принять непосредственное участие широкие круги читателей журнала. Нельзя не отметить и серьезное научное значение подобной массовой научной работы. Как известно, почти вся новая геометрия треугольника создавалась именно этим путем на базе элементарных и полуюзлементарных французских и английских математических журналов. У нас в СССР почти отсутствует культура элементарной математики как науки, и потому редакция должна была обратить особенное внимание на создание раздела элементарно-научных статей.

Столь же важное значение имеют в научном отделе статьи по истории математики. Прекрасным образцом подобного рода статей может служить статья И. Чистякова „О новейших исследованиях в области древнейшей истории математики“. К сожалению, редакция сочла необходимым поместить эту статью частями в трех первых номерах, благодаря чему ценность статьи значительно понизилась. Ведь большинство читателей приобретает сборники в магазинах и далеко не всем удается приобрести три последовательных номера. Мне кажется, в дальнейшем редакция должна избегать помещения статей с продолжениями.

Научно-популярных статей, посвященных более глубоким и неэлементарным вопросам математики, в сборниках не имеется. Между тем такие статьи, как мы указали выше, желательны. В то же время редакция нашла возможным поместить статью Креера „Алгебраические уравнения“, которая представляет весьма серьезное исследование и в сборниках рассматриваемого типа совершенно неуместна. Надо думать, что эта статья представляет дань неправильным установкам редакции, о которых говорилось выше.

При переходе к методическому отделу сборников приходится прежде всего отметить, что в этом отделе частная методика явно довлеет над общей; строго говоря, последняя в сборниках не представлена вовсе. Я склонен думать, что неблагоприятное влияние в этом смысле мог оказать весьма многочисленный состав редакционной коллегии, в которую входят лица совершенно различных методических воззрений. Это обстоятельство, впрочем, будет иметь значение и в дальнейшем и может помешать журналу приобрести определенное лицо. Во всяком случае нам хотелось бы видеть в журнале статьи по большому методическим вопросам, так как многие из этих вопросов приобрели в настоящее время очень острый характер. Назову, например, вопрос о слишком формальном изложении алгебры в существующих учебниках, вопрос о преподавании геометрии и связанное с этим развитие логического мышления учащихся, вопрос о быстрой забываемости школьного курса математики, вопрос об организации и работе школьных математических кружков; вопрос об увязке школьного курса математики с вузовскими и вузовскими курсами, в частности вопрос об элементах высшей математики в 10-й группе и т. д. Было бы весьма желательным, чтобы подобные вопросы нашли свое освещение на страницах сборников.

Методические статьи, помещенные в первых трех сборниках, носят гораздо более узкий характер, но в большинстве случаев представляют известный интерес. К сожалению, ценность отдельных статей все же сомнительна. Так, мы не можем признать удачной статью „Годовой производственный план работы по математике в средней школе“ П. Ларичева (сборник № 2). На наш взгляд было бы гораздо более полезным рассмотреть принципы составления такого плана, а не давать сухую сводку цифр, которые, конечно, должны быть изменены (на основе каких принципов?) в соответствии с реальными возможностями данной школы или группы. Другая статья того же автора, „Квадратные уравнения“, не вносит ничего нового в методику преподавания этого вопроса. Надо думать, я не ошибусь, если скажу, что в 90% школ этот вопрос прорабатывается именно так, как это изложено у П. Ларичева.

Отсутствием свежести страдают и некоторые другие статьи. Все же в сборнике имеются статьи, которые следует признать безусловно полезными. К ним можно отнести статьи Снигирева, Зерченининова, Воронова, Берга, Волковского, Сапунова и др.

Небольшое замечание следует сделать относительно статьи Березанской „Алгебраические дроби с одночленными знаменателями“. Автор говорит, что „полезно указать учащимся, что при сокращении алгебраической дроби, напри-

мер $\frac{ba^3}{3a^b}$, общим делителем числителя и знаменателя будет $3a^3$, где 3 является

общим и наибольшим делителем коэффициентов, а a^3 будет общим и наибольшим делителем a^3 и a^b только при значениях $a > 1$ “. Едва ли такое замечание будет полезно, так как с точки зрения алгебраической a^3 является именно общим и наибольшим делителем выражений a^3 и a^b , а с арифметической точки зрения вопрос вообще отпадает, если a не есть целое число.

Большой интерес представляет отдел задач. К сожалению, отдел задач во втором сборнике составлен несколько неряшливо: в задаче № 1 допущена опечатка; задачи № 13 и 14 весьма неясно средактированы; благодаря этому эти две задачи оказываются неудачными.

Отдел „Вопросы преподавания за границей“ представлен одной статьей А. Барсукова. Очень жаль, что автор статьи не остановился более подробно на программе и организации работы в дополнительном классе французской школы, классе математики, так как класс математик представляет своеобразное и весьма интересное явление французской школы. Многие утверждения автора мне кажутся спорными, но остановиться на этом подробнее в этой заметке я не имею возможности.

Сравнивая между собой вышедшие три сборника, можно заметить, что третий сборник значительно отличается от первых двух; он гораздо однороднее их и больше приближается к тому типу журнала, какой хотелось бы видеть нам. Повидимому, вокруг журнала начинают концентрироваться постоянные кадры авторов и читателей, а это уже наполовину определяет успех дела.

Надо думать, что с течением времени редакция сумеет преодолеть те недостатки, о которых мы говорили выше, и журнал делается могучим фактором поднятия математической грамотности и культуры в нашей стране.

Нельзя не выразить благодарности редакции журнала за первую удавшуюся попытку организации научно-методического математического журнала.

Р. Бончковский

КО II ВСЕСОЮЗНОМУ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ СЪЕЗДУ

Ленинград, 24—30 июля 1934 г.

Портреты знаменитых математиков XVIII—XX вв. Исполнено Лабораторией научно-прикладной фотографии и кинематографии Академии наук СССР.

Издательство Всесоюзной академии наук выпустило ко II Всесоюзному математическому съезду альбом, 50 портретов знаменитых математиков XVIII—XX вв., как сказано на обложке картонного футляра, в который заключены фотографически воспроизведенные в формате открыток портреты. Заглавие, правда, не совсем точно: в собрание вошли и математики XVII в.: Непер, Декарт и Ферма. Даже Лейбница, родившегося в 1646 г. и скончавшегося в 1716 г., относят к XVII в., да и деятельность Ньютона в значительной степени падает также на XVII столетие,—век, когда родился метод новейшей математики, а XVIII в. был уже временем их разработки. Из 47 лиц, портреты которых вошли в собрание (трое — Эрмит, Чебышев, Вейерштрасс — представлены каждый двумя), трое Бернулли принадлежат к этим разработчикам анализа бесконечно малых. Поэтому естественно, что, даже ограничивши себя лишь математиками, закончившими уже свое жизненное поприще, издательство не могло вместить всех, которые заслуживали бы внесения. Можно пожалеть, что не вошли из русских математиков П. Е. Жуковский, А. Н. Коркин и В. П. Ермаков, из французских мы не находим Лежандра, Монжа, Понселе, Пуансо, Пуассона, Лиувилля, Ж. Бертрана, М. Шалля, Гальфена и П. Аппеля; из немецких — Куммера, Грассмана, Штаудта, Мебиуса. Из голландцев следовало бы, может быть, вставить Гюйгенса. Но особенно бросается в глаза отсутствие итальянцев.

Если знаменитые математики эпохи Возрождения Кардано, Тарталья и др. не попали, как представители более раннего периода, если не попали, наряду с Виетом, Кавальери и Торичелли, то для нового времени кого-нибудь из блестящей плеяды нового возрождения Италии: Бетти, Бриоски, Баталлини, Бельтрами, геометра Л. Кремона, недавно скончавшегося аналитика Дини и Г. Пеано,

было бы, конечно, желательно видеть в этой серии. Я привожу имена, которые сразу всплывают в памяти, и то уже набралось почти полсерии новой. Можно бы назвать кое-кого из американских математиков, хотя бы В. Джибса¹⁾. И может быть издательство „Академии“ продолжит свой удачный начин, давши вгору новую серию портретов.

Мне, как интересующемуся вопросами геометрии, особенно хотелось отметить пробел имен лиц, приобретших славу своими трудами в области геометрии,— пробел, который хотелось бы видеть пополненным.

Д. С и н ц о в

¹⁾ Ср. новую книжку D. E. Smith and J. Ginsburg, A. History of Mathematics in America before 1900, Open Court publ. of 1934, о которой, может быть, мне удастся сказать несколько слов на страницах этих сборников.

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
П. С. Александров. П. С. Урысон (к десятилетию со дня смерти) . .	3
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА	
Р. Н. Бончковский. Исследование функции третьей степени на максимум и минимум элементарными средствами	7
А. В. Об уравнении $\sum_{x=1}^{x=n} N_z^3 = 0$	11
Б. Гамбье. Соотношения Эйлера между кругом, описанным около треугольника, и кругами, касательными к трем сторонам треугольника	13
С. И. Зетель. Вычисление площадей некоторых треугольников проекции	14
С. И. Зетель. Некоторые свойства прямых Чевы	19
Р. Н. Бончковский. Заполнение пространства тетраэдрами	26
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА	
Н. А. Извольский. Геометрия Понселе	41
Л. П. Радзишевский. О геометрических аксиомах расположения системы Гильберта	64
Д. М. Синцов. О выводе выражений для меры кривизны и меры кручения	69
Б. Корсаков. Элементарное доказательство обобщенной теоремы умножения гамма-функций	77
А. Я. Литвиненко. Нахождение рациональных корней численного уравнения	81
Н. А. Извольский. О формуле Кардана	86
М. П. Черняев. Об одном свойстве системы двух кругов	88
М. П. Черняев. Два свойства астроида	89
М. М. Иванченко. Кривые, связанные со взаимными окружностями . .	92
М. М. Иванченко. Обобщенные конхоидальные кривые	98
Д. М. Синцов. Циссоиды эллипса и гиперболы	100
А. А. Мочульский. Упрощенный способ графического определения коэффициентов ряда Фурье	105
МЕТОДИКА	
Д. Д. Мордухай-Болтовской. Математика и логика в школе . . .	97
ЗАДАЧИ	
Задачи	129
Упражнения для учащихся	130
Решения задач	132
БИБЛИОГРАФИЯ	
Математика и физика в средней школе. Методические сборники № 1, 2, 3	149
Ко II Всесоюзному математическому съезду. Портреты знаменитых математиков	150